

Petruș Alexandrescu

Georgeta Alexandrescu

Ion Burcă

Matematica în gimnaziu

Clasele V-VIII

**Exerciții și probleme alese
pentru juniori**

Editura NOMINA

Editor: Alexandru Creangă
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu

Pentru comenzi prin poștă: 0757.020.442
0348.439.417

Telefon	Zona
0741.488.918	Oltenia (Dolj, Gorj și Mehedinți), Banat și Transilvania (Alba și Hunedoara);
0748.111.247	Crișana și Transilvania (Sălaj, Cluj, Mureș, Harghita și Covasna);
0751.207.922	Oltenia (Vâlcea și Olt), Transilvania (Brașov și Sibiu) și Muntenia (Argeș, Teleorman și Giurgiu);
0757.020.443	Transilvania (jud. Bistrița-Năsăud) și zona Maramureș;
0746.200.413, 0769.221.685	Buzău, Bacău, Neamț, Suceava; Vrancea, Vaslui, Iași, Botoșani;
0744.429.512	Muntenia (Dâmbovița, Prahova, Brăila, Ialomița și Călărași), Dobrogea și jud. Galați;
0755.107.291, 0769.221.680, 0757.020.440	București

Punct de lucru: Loc. Bradu, DN 65B, nr. 31, jud. Argeș
e-mail: comenzi.nomina@gmail.com
www.edituranomina.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Copyright © Editura Nomina, 2025
Toate drepturile aparțin Editurii Nomina
Reproducerea totală sau parțială fără acordul editorului intră sub incidența legii 8/1996.

Cuprins

ARITMETICĂ.....	5
1. Operații cu numere întregi și zecimale. Ordinea efectuării operațiilor. Sisteme de numerație.....	5
2. Divizibilitatea numerelor. Numere prime. Descompunerea în factori. C.M.M.D.C., C.M.M.M.C. al două sau mai multe numere. Probleme.....	9
3. Frații ordinare. Compararea fracțiilor. Operații cu fracții. Frații zecimale finite și periodice. Probleme	12
4. Procente. Rădăcina pătrată. Rapoarte și proporții; proporții derivate. Probleme	18
5. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă; regula de trei compusă. Probleme.....	20
6. Utilizarea principiului cutiei în rezolvarea problemelor.....	21
7. Exerciții și probleme recapitulative	25
GEOMETRIE PLANĂ	32
1. Unghiuri. Triunghiuri. Drepte paralele.....	32
2. Cercul. Patrulater inscriptibile	39
3. Relații metrice. Arii	43
4. Probleme recapitulative și pentru cercurile de elevi	46
GEOMETRIE ÎN SPAȚIU	49
ALGEBRĂ	55
1. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere. Descompuneri în factori. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere	55
2. Funcții.....	69
3. Ecuații. Sisteme de ecuații.....	72
4. Ecuația de gradul II	76
5. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor.....	78
6. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor. sau al sistemelor de ecuații	79
7. Identități.....	81
8. Inegalități.....	83
9. Diverse.....	89
RAȚIONAMENTUL ÎN MATEMATICĂ. PRINCIPII ȘI METODE.....	98
SOLUȚII	112

ARITMETICĂ

1. Operații cu numere întregi și zecimale

Ordinea efectuării operațiilor

Sisteme de numerație

1. Să se efectueze:

- $390 + 10 \cdot 3 - 3 : 3 + 1$;
- $10 \cdot [2 + 4 \cdot (3 + 6 : 2)]$;
- $2 \cdot (3200 : 100 + 16 \cdot 2 + 8 : 4)$;
- $5 \cdot \{1 + 9 \cdot [1 + 4 \cdot (35 + 65 : 5)]\} : 1738$;
- $6,56 \cdot 4,36 - 3,36 : (0,736 + 2,464) - 20,0516$;
- $62,92 : 5,2 - 4,2 \cdot (7 - 6,3) \cdot 3,67 - 1,2102$;
- $(32,24 \cdot 0,32 + 366,032 \cdot 0,1) : 2,3 - 18,6388$;
- $468,39 : 7,8 + (321,96 - 6,4 \cdot 0,15) : (30,8 \cdot 4,05 - 122,6) - 100,04$;
- $[1120,1 - 0,1 \cdot (0,2 + 20130,2 : 2,005)] : 116,08$;
- $(2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7)^2 : 4^{15}$;
- $(4^{16} : 2^{32} - 2^0) \cdot (2^4 \cdot 3^4 - 6^4)$;
- $(3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^9) : 3^{45}$.

2. Să se efectueze:

$$E = \left(\frac{0,749}{1,1} - \frac{5,243}{14,3} \right) \cdot \frac{23}{4,494} \cdot 11 \cdot 3,9.$$

3. Să se rezolve exercițiul:

$$E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) : 3} + \frac{1 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 3 \frac{1}{2} : 4 + 0,9}{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{21} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) \right] : \frac{1}{18}} - \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(3 + 3 \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 \frac{2}{3} + 1 \frac{4}{5} \right)}{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{45} \right] : 0,1}.$$

4. Să se arate că:

$$1_2 + 11_3 + 111_4 + 1111_5 + 11111_6 = 3311_8;$$

$$205_6 + 413_6 = 353_7.$$

5. Să se calculeze numărul:

$$N = \frac{4013_6 + 1333_4}{100_5} - 1111_2.$$

6. Să se verifice egalitățile:

$$4422_6 - 2244_6 = 5533_6 - 3355_6;$$

$$4422_7 - 2244_7 = 5533_7 - 3355_7.$$

7. Să se arate că:

$$1212_3 + 1313_4 + 1414_5 + 1515_6 + 1616_7 = 2000002_3.$$

8. Să se efectueze:

$$2^3 + 2^{10} : 2^8 \cdot 2 + 2 \cdot 2^7 : 2^5 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - 4 \cdot 2^3.$$

9. Să se calculeze:

$$\frac{1}{0,069(4)}.$$

10. Să se reconstituie adunarea:

$$\begin{array}{r} 1 \ * \ 5 \ * \ + \\ 4 \ 1 \ * \ 7 \\ \hline 6 \ * \ 8 \ 6 \end{array}$$

unde stelulele reprezintă cifre în baza zece.

11. Să se reconstituie înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 4 \ 6 \ \times \\ * \ * \\ \hline * \ * \ * \\ * \ * \ * \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array}$$

unde stelulele sunt cifre scrise în baza zece.

12. În fiecare din adunările:

$$\begin{array}{r} * \ * \ * \ + \\ * \ * \ * \\ * \ * \ * \\ \hline \square \square \square \square \end{array} \quad \begin{array}{r} * \ * \ * \ + \\ * \ * \ * \\ * \ * \ * \\ \hline \square \square \square \end{array}$$

stelulele reprezintă elemente distincte ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Fie N_1 și N_2 rezultatele acestor adunări. Să se arate că: $N_1 - N_2 \leq 1782$.

13. Să se afle numerele de forma $\overline{xyzy}$ care au suma cifrelor egală cu 20 și adunate cu răsturnatele lor dau rezultatul 13783.

14. Să se reconstituie înmulțirea:

$$1185184 \cdot \overline{ab} = \overline{cccccc00},$$

unde a, b, c sunt cifre în baza 10, cu $a \neq 0$.

15. Câte numere naturale cuprinse între 10 și 100 se pot forma care să conțină cifra 7?

16. Produsul a două numere naturale consecutive este 18906. Să se afle numerele.

17. Produsul a două numere impare consecutive este 483. Să se afle numerele.

18. Suma a trei numere naturale diferite este 60. Știind că unul din ele este media aritmetică a celorlalte două, iar altul este diferența celorlalte două, să se afle cele trei numere.

19. Suma a trei numere pare consecutive este 744. Să se afle numerele.

20. a) Suma a 10 numere naturale consecutive este 235. Să afle numerele.

b) Suma a 7 numere pare consecutive este 112. Să se afle aceste numere.

21. Să se găsească toate perechile de numere naturale, astfel ca produsul lor să fie 576.

22. Să se găsească cel mai mic număr natural nenul care împărțit, la primele 9 numere naturale să dea tot timpul restul 1.

23. Să se afle împărțitorul când deîmpărțitul este 1042, câtul 7 și restul 6.

24. Într-o operație de împărțire, diferența dintre deîmpărțit și împărțitor este 1436, câtul 15 și restul 64. Să se reconstituie împărțirea.

25. Să se arate că numărul $N = 1977 + 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 1976)$ este un pătrat perfect.

26. Să se găsească condiția ca numărul $a \cdot \frac{\overline{aaa}}{148}$ să fie natural.

27. Să se arate că ca expresia de forma: $\overline{a4} \cdot \overline{a6} + 1$ este pătrat perfect oricare ar fi cifra a .

28. Produsul a două numere de două cifre, ambele având aceeași cifră a zecilor, este 3906. Să se afle numerele.

29. Să se arate că:

$$\frac{0,1(11)_3}{0,2(22)_4} = \frac{0,11(1)_3}{0,22(2)_4} = \frac{3}{4}.$$

30. Să se afle x din egalitatea:

$$\left\{ \left[\left(\frac{5x-3}{2} - 1 \right) - (20-12) : (5 \cdot 2^2 - 2^4) \right] - 989 \right\} - 0,5 = 6.$$

31. Să se calculeze sumele:

$$\begin{aligned}S_1 &= (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{1992}; \\S_2 &= (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^3 \cdot 3 + \dots + (-1)^{1992} \cdot 1992; \\S_3 &= (-1)^1 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 4 + (-1)^3 \cdot 6 + \dots + (-1)^{996} \cdot 1992.\end{aligned}$$

32. Media aritmetică a 49 de numere naturale consecutive este 105. Să se afle numerele.

33. Să se arate că numărul:

$$N = \frac{2n - 1 + 3 \cdot (-1)^{n-1}}{4}$$

este întreg, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

34. Să se determine cifra a din egalitatea:

$$\frac{\overline{a2}}{41} + \frac{\overline{4a}}{8} + \frac{\overline{a2a}}{3} = 284.$$

35. Să se arate că numerele de forma:

$$\overline{66\dots6}$$

nu pot fi pătrate perfecte.

36. Să se afle un număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ care împărțit la 5 să dea câtul $\overline{bc}$ și restul a .

37. Să se compare numerele:

$$A = 3^{183} \text{ și } B = 2^{307} - 2^{306} - 2^{305}.$$

38. Să se determine cifrele x, y și z , astfel ca numărul zecimal $0,xy(z2)$ să fie egal cu numărul $\frac{49}{132}$.

39. Să se determine numerele naturale x, y cu proprietatea:

$$x + y = xy.$$

40. Suma a două numere naturale este egală cu cubul primului număr.

a) Să se afle primul număr, știind că al doilea este zero.

b) Să se arate că al doilea număr este divizibil cu 6.

41. Un bazin cu o capacitate de 1976 litri este umplut într-o oră de 9 robinete cu debitul de 200 litri pe oră și respectiv 244 litri pe oră. Să se afle câte robinete sunt din fiecare.

42. În 510 sticle, unele de $\frac{1}{2}$ litri, altele de 1 litru și al treilea fel de $\frac{1}{4}$ litri încap 160 litri de lichid. Sticlele de 1 litru sunt de 10 ori mai puține decât cele de $\frac{1}{2}$ litri. Câte sticle sunt din fiecare fel?

43. La un meci de fotbal un bilet pentru tribuna I costă 13 lei, iar pentru peluză 7 lei. Știind că într-o școală s-au cumpărat bilete în valoare de 143 lei, să se afle câți elevi au cumpărat bilete de 13 lei și câți de 7 lei?

44. Perimetrul unui dreptunghi este de 84 m. Dacă mărim lățimea cu 6 m și micșorăm lungimea lui cu 6 m, se obține un dreptunghi de aceeași arie. Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

45. Trei persoane au împreună 200 lei. Primele două au împreună 110 lei, iar ultimele două 190 lei. Câți lei are fiecare persoană'?

46. Suma a trei numere este 1015. Dacă din fiecare număr se scade același număr, se obțin respectiv numerele 15, 132 și 346. Care sunt cele trei numere?

47. Câte timbre a 3 lei bucata și câte timbre a 5 lei bucata s-au cumpărat cu 50 lei, știind că au fost cumpărate în total 14 timbre?

2. Divizibilitatea numerelor

Numere prime

Descompunerea în factori

C.M.M.D.C., C.M.M.M.C. al două sau mai multe numere

Probleme

1. Să se afle două numere, știind că raportul lor este $\frac{25}{7}$, iar cel mai mare divizor comun este 6.

2. Să se afle două numere, știind că produsul lor este 6300 și cel mai mare divizor comun al lor este 6.

3. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{1800 \cdot 5600 \cdot 13000}{(2^6 \cdot 3 \cdot 13) \cdot (2^8 \cdot 5^7 \cdot 7)} = \frac{3}{8}.$$

4. Să se afle două numere, știind că raportul lor este $\frac{6}{11}$, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 1386.

5. Care este cel mai mare număr de forma $\overline{abab}$ care să aibă cel mai mic număr de divizori?

6. Câți divizori are fiecare din numerele: 72, 100, 315, 1000?
7. Produsul a două numere consecutive naturale este 18906. Să se afle numerele.
8. Trei numere naturale înmulțite respectiv cu 5, 7 și 9 dau același rezultat. Care sunt cele trei numere, dacă produsul lor este 793800?
9. Să se afle două numere, știind că cel mai mare divizor comun al lor este 500, iar câtul lor este 0,5(6).
10. a) Să se găsească numărul natural care să fie mai mic decât pătratul său cu 1332.
b) Să se găsească trei numere naturale consecutive al căror produs să fie 5814.
11. La o competiție sportivă au participat un număr de elevi cuprins între 270 și 350. Să se afle acest număr, știind că elevii participanți se pot încolona în rânduri complete de câte 5, 6, 12 și 15 elevi.
12. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și a, b, c trei cifre fixate din această mulțime. Să se arate că oricum am alege aceste trei cifre, suma tuturor numerelor de trei cifre formate cu ele (fără repetarea vreunui dintre ele) este divizibilă cu 111.
13. Suma a două numere întregi este 455. Câtul împărțirii celui mai mare la cel mai mic este 15 și restul 23. Să se afle cele două numere.
14. Două numere naturale sunt astfel încât diferența lor este 266, iar primul mărit cu 2 este de 8 ori mai mic decât al doilea. Să se afle cele două numere.
15. Produsul a două numere este 4851000, cel mai mare divizor comun al lor este 210, iar câtul lor $\frac{10}{11}$. Să se afle cele două numere.
16. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, expresia:
$$E = 10^n + 17$$
 se divide cu 9.
17. Să se afle numărul natural n , știind că $n - 2$ divide pe 81, iar $n + 2$ divide pe 2431.
18. Să se arate că numărul $(\overline{abcd} + \overline{dcba})^2$ este multiplu de 121.
19. Să se găsească două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 1805, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

20. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Să se arate că dacă $3a + 5b$ se divide cu 17, atunci și $4a + b$ se divide cu 17.

21. Demonstrați că numărul $\overline{abab} - \overline{baba}$ se divide cu 909.

22. Să se determine restul împărțirii numărului $N = 53^m + 53^n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$ prin 13.

23. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 5^{n+2} + 5^{n+1} + 5^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sunt divizibile cu 31 .

24. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $2a - 3b + 4c = 0$, să se arate că numărul $N = b(a - c)$ este divizibil prin 6.

25. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 6^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^n \cdot 3^{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sunt divizibile prin 13.

26. Fie x, y, z cifre consecutive, astfel încât $\overline{xy} = z + 19$. Să se arate că $\overline{xyz}$ este multiplu de 13.

27. Să se arate că numerele de forma: $7^{n+2} \cdot 11^{n+1} + 539$, $n \in \mathbb{N}$, se divid cu 1078.

28. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, expresia $E = 10^n + 62$ este divizibilă cu 18.

29. Să se demonstreze că numărul $N = 3^{40} - 2^{40}$ se divide prin 5.

30. Împărțind un număr la 72 s-a obținut restul 68. Dacă același număr se împarte la 24, care va fi noul rest și cum se va modifica câtul?

31. Să se afle trei numere naturale supraunitare, știind că produsul primelor două este 287, iar produsul ultimelor două este 154.

32. Să se determine toate numerele de forma $\overline{abc}$ divizibile cu 15, astfel ca:

$$\overline{cba} - \overline{abc} = 297.$$

33. Să se afle două numere, știind că diferența dintre primul și înzecitul celui de-al doilea este 1173, iar primul împărțit la al doilea ne dă câtul 50 și restul 13.

34. Să se determine numărul natural de patru cifre a cărui descompunere în factori primi este de forma $a^5 b^5$.

35. Să se găsească toate numerele întregi n pentru care numărul $N = n^8 + 4$ este prim. Să se determine în aceste cazuri numerele N .

36. Câte fracții de forma $\frac{\overline{198y}}{2x}$ sunt ireductibile, știind că numitorul este divizibil cu 5?

37. Să se arate că numărul:

$$N = 3^{9+2} \cdot 4^{9+3} + 3^{9+3} \cdot 4^{9+2}$$

este divizibil prin 63.

3. Frații ordinare

Compararea fracțiilor

Operații cu fracții

Fracții zecimale finite și periodice

Probleme

1. Să se calculeze:

$$a) \frac{\frac{1}{9} + 0,(2) + 0,(3) + 0,(4)}{0,0(1) + 0,0(2) + 0,0(3) + 0,0(4)};$$

$$b) \frac{\left[53\frac{3}{4} + 9,1(6) \right] \cdot 1,2}{\left(10\frac{3}{10} + 8,5 \right) \cdot 0,(55)} - \frac{3\frac{13}{35} \cdot 5,8(3)}{3,(6) - 3,1(6)};$$

$$c) \frac{6\frac{7}{9} + 0,(5) - 0,45(3)}{0,(7) + 0,54(6) + 0,02} : 3\frac{10}{11};$$

$$d) \frac{5\frac{3}{9} - 3\frac{3}{4}}{15,8(3) : 10} + 5,(3) - \frac{3\frac{3}{4}}{1,58(3)}.$$

2. Să se afle x dacă:

$$a) \frac{1,2 : 0,375 - 0,2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0,8} = \frac{0,016 : 0,12 + 0,7}{x};$$

$$b) \frac{0,125 \cdot x}{\left(\frac{19}{24} - \frac{21}{40} \right) \cdot 8\frac{7}{16}} = \frac{\left(1\frac{28}{63} - \frac{17}{21} \right) \cdot 0,7}{0,675 \cdot 2,4 - 0,02};$$

$$c) \frac{15,2 \cdot 0,25 - 48,51 : 14,7}{x} = \frac{\left(\frac{13}{44} - \frac{2}{11} - \frac{5}{66} : \frac{5}{2} \right) \cdot \frac{6}{5}}{3,2 + 0,8 \cdot \left(5\frac{1}{2} - 3,25 \right)}.$$

3. Să se afle x dacă:

$$a) 5\frac{4}{7} : \left\{ x \cdot 1,3 + 8,4 \cdot \frac{6}{7} \cdot \left[6 - \frac{(2,3 + 5 : 6,25) \cdot 7}{8 \cdot 0,0125 + 6,9} \right] \right\} = 1\frac{1}{14};$$

$$b) \frac{(2,7 - 0,8) \cdot 2\frac{1}{3}}{(5,2 - 1,4) : \frac{3}{7}} + x + 8\frac{9}{11} - \frac{(1,6 + 154,66 : 70,3) : 1,9}{\left(2\frac{2}{5} - 1,3\right) : 4,3} = 2,625;$$

$$c) \frac{\left[4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} : x + (2,5 : 1,25) : 6,75 \right] : 1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375\right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)} = \frac{17}{27}.$$

4. Să se calculeze:

$$a) 6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}};$$

$$b) \frac{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 400} : (6,79 : 0,7 + 0,3);$$

$$c) \frac{4,5 : \left[47,375 - \left(26\frac{1}{3} - 18 \cdot 0,75\right) \cdot 2,4 : 0,88 \right]}{17,81 : 1,37 - 23\frac{2}{3} : 1\frac{5}{6}};$$

$$d) \frac{3 : \frac{2}{5} - 0,09 : \left(0,15 : 2\frac{1}{2}\right)}{0,32 \cdot 6 + 0,03 - (5,3 - 3,88) + 0,67}.$$

5. Să se calculeze:

$$a) 1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(0,4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right);$$

$$b) \left(10 : 2\frac{2}{3} + 7,5 : 10\right) \cdot \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} \cdot 0,25 + \frac{157}{360}\right);$$

$$c) \frac{1}{3} : \frac{2}{3} + 0,228 : \left[\left(1,5291 - \frac{14,53662}{3 - 0,095} \cdot 0,305\right) : 0,12\right];$$

$$d) \left\{ \frac{8,8077}{20 - [28,2 : (13,333 \cdot 0,3 + 0,0001)] \cdot 2,004} + 4,9 \right\} \cdot \frac{5}{32};$$

$$e) \frac{\left[\left(6,2 : 0,31 - \frac{5}{6} \cdot 0,9 \right) \cdot 0,2 + 0,15 \right] : 0,02}{\left(2 + 1 \frac{4}{11} \cdot 0,22 : 0,1 \right) \cdot \frac{1}{33}}.$$

6. Să se arate că:

$$E = \frac{[3, (63) + 0, (81)] \cdot 0, (142857)}{[0, 0(6) - 0, 0(5)] : 34, (396825)} = 1970.$$

7. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{[3, (63) + 0, (81)] \cdot 0, (142857)}{[0, 0(8) - 0, 0(7)] : 34, 5(015873)} = 1976.$$

8. Să se efectueze:

$$E = \left(\frac{0,749}{1,1} - \frac{5,243}{14,3} \right) \cdot \frac{11 \cdot 3,9}{4,494}.$$

9. Să se calculeze:

$$E_1 = \frac{\left[1, (5) + 1 \frac{20}{45} \right] \cdot \left(2,17 - \frac{11}{50} + 2 \frac{3}{5} \right)}{[0,4(13) + 0,5(86)] \cdot (\sqrt{2,89} + \sqrt{0,0025})} \cdot \sqrt{\frac{1225}{19881}},$$

$$E_2 = \left[0,78 : 2,6 + \frac{77}{90} : \left(6 - \frac{2,3 + 5 : 6,25}{8 \cdot 0,0125 + 6,1} \right) \right] : \sqrt{1 \frac{781}{900}}.$$

10. Să se calculeze numărul:

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8}.$$

11. Să se efectueze:

$$\frac{\left[\left(12 \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{4}{15} \right) : \frac{1}{15} - 6 : \frac{1}{28} \right] \cdot \frac{4}{11}}{\left(5 \cdot 2 \frac{2}{5} - 8 \frac{3}{22} \right) : 42 \frac{1}{2}}.$$

12. Să se calculeze:

$$E = \left[1 + 1\frac{2}{3} - 0, (2) + 5\frac{1}{3} \right] : \frac{20}{9}.$$

13. Să se calculeze:

$$E = \left(1 - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \right) + \left(1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} \right) \cdot \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} \right).$$

14. Să se afle x din egalitatea:

$$\left(-0,01 + \frac{9}{2} + \frac{7}{0,5 \cdot \frac{1000}{5^3}} + \frac{7}{1:0,05} \right) : 0,1 : \frac{1}{x} = 1977.$$

15. Să se rezolve ecuația:

$$x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 3 - \frac{1}{5} - \frac{1}{60} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}.$$

16. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) : x = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}.$$

17. Să se rezolve ecuația:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) \cdot x = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}.$$

18. Să se determine x din egalitatea:

$$\frac{6 - [(-3) + (-7)] - [(-1) - (-5) - (-8)]}{(-4) - (-2) - \{(-5) - [(-7) + (-3) - (-8)]\}} + \frac{3 \cdot (-5)^2 - 2 \cdot (-4)^3 - (+2)^4 - (-7)^2}{x} = 3.$$

19. Să se afle $n \in \mathbb{N}$ pentru care:

$$\text{a) } \frac{3}{5} < \frac{n}{12} < \frac{14}{15};$$

$$\text{b) } \frac{14}{29} < \frac{6}{n} < \frac{7}{12}.$$

20. Pentru care valori $x \in \mathbb{N}$ avem:

$$\text{a) } \frac{3}{5} > \frac{x+1}{35} > \frac{3}{7};$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} < \frac{5}{7}?$$

21. Un automobil, după ce a parcurs $\frac{2}{3}$ din drum, mai are de parcurs 8 km până ajunge la $\frac{5}{6}$ din drum. Ce lungime are tot drumul?

22. Să se afle numărul natural de două cifre, astfel încât raportul dintre el și răsturnatul său să fie egal cu $\frac{9}{2}$.

23. Suma a trei fracții care au același numărător 1 este $\frac{71}{105}$. Știind că suma numitorilor este 15, să se afle cele trei fracții.

24. Care din numerele:

$$A = \frac{1}{1988} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1988} \right) \text{ și } B = \frac{1}{1987} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1987} \right)$$

este mai mare?

25. O brigadă de tractoriști ară în prima zi jumătate din suprafața unui teren agricol și încă, 5 ha. A doua zi ară jumătate din rest, iar în a treia zi ultimele 25 ha. Să se afle suprafața terenului și cât a arat în fiecare zi.

26. Să afle un număr N natural, știind că diferența dintre jumătatea și sfertul său este cu 24 mai mare decât diferența dintre treimea și șesimea sa.

27. Elevii unei clase și-au propus să strângă o cantitate de 70 kg de mușetel. Ei au strâns la un moment dat $\frac{3}{5}$ din cantitate. Câte kilograme mai au de cules?

28. Scrieți toate fracțiile ordinare cu numitorul 112 care sunt cuprinse între $\frac{1}{6}$ și $\frac{1}{5}$. Care din aceste fracții sunt ireductibile?

29. Suma a două fracții care au același numărător este $\frac{11}{10}$, iar raportul numitorilor este $\frac{5}{2}$. Să se afle cele două fracții.

30. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{6n+7}{7n+2}$ se poate simplifica?

31. O brigadă de tractoriști dintr-o fermă a arat în prima zi $\frac{3}{13}$ din întreaga suprafață.

A doua zi a arat încă $\frac{4}{11}$ din ceea ce a rămas de arat. A treia zi a arat $\frac{4}{7}$ din ceea ce rămăsese nearat după a doua zi. A patra zi s-a terminat aratul.

a) Să se arate prin calcul că s-au arat arii egale în ziua a doua și a treia, iar în ziua a patra s-a arat cel mai puțin.

b) Cât s-a arat în fiecare zi dacă în prima zi s-a arat cu 6 ha mai mult decât în ultima zi?

32. Doi elevi au economisit împreună suma de 500 lei. Dacă primul elev ar da celui de-al doilea $\frac{1}{3}$ din banii săi, atunci al doilea ar avea $\frac{2}{3}$ din toată suma. Să se afle câți bani are fiecare.

33. Să se afle trei numere naturale, știind că primul este $\frac{3}{5}$ din al doilea, al doilea reprezintă $\frac{7}{3}$ din al treilea, iar produsul dintre primul și ultimul este 1260.

34. Un număr pozitiv împărțit la 7 se micșorează cu 120. Care este numărul?

35. O librărie a vândut într-o zi caiete de 1,10 lei, creioane de 0,90 lei și maculatoare de 0,95 lei, încasând suma de 305 lei. Să se afle câte caiete, creioane și maculatoare s-au vândut, știind că numărul caietelor este de trei ori mai mare decât al creioanelor, iar al acestora jumătate din cel al maculatoarelor.

36. Să se afle un număr, știind că diferența dintre jumătatea și sfertul său este mai mică decât treimea sa cu 5.

37. Într-un bazin cu capacitatea de 100 ℓ sunt 24 ℓ de apă. Din aceștia se iau $\frac{1}{3}$ din cantitate, la care se adaugă apoi $\frac{1}{4}$ din rest. Să se afle câți litri mai încap în bazin.

38. Să se afle un număr, știind că diferența dintre doimea și pătrimea sa este mai mică decât treimea sa cu 39.

39. Să se afle două numere A și B , știind că A este $\frac{3}{5}$ din B , iar dacă A ar avea cu 20 mai mult, atunci B ar fi de 1,25 ori mai mare decât A .

4. Procente

Rădăcina pătrată

Rapoarte și proporții; proporții derivate

Probleme

1. Să se împartă numărul 1400 în patru părți astfel ca: partea I să se raporteze la partea a doua ca $\frac{2}{3}$; partea a II-a și a III-a ca $\frac{3}{5}$, iar partea a treia la a IV-a ca $\frac{5}{4}$.

2. Să se găsească un număr de două cifre, știind că raportul dintre diferența cifrelor și suma cifrelor sale este $\frac{3}{4}$.

3. Să se afle ariile a două dreptunghiuri, știind că raportul lungimilor lor este $\frac{4}{3}$, raportul lățimilor este $\frac{7}{9}$, iar diferența ariilor este de $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$.

4. Se consideră numărul $n = 1986^2 - 1986 - 1985$. Să se afle x din proporția:

$$\frac{x}{1985} = \frac{397}{n}.$$

5. Diferența cuburilor a două numere naturale este 61, iar pătratul raportului lor este $\frac{25}{16}$. Să se afle numerele.

6. Se dă șirul de rapoarte: $\frac{1}{x} = \frac{4}{y} = \frac{8}{z} = \frac{2}{t}$. Să se afle numerele x, y, z și t , știind că $xy = z$.

7. Fie șirul de rapoarte egale: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$. Știind că $xyz = 139755$, să se afle x, y, z .

8. Să se determine numerele naturale x, y, z , știind că sunt proporționale cu 0,25; 0,(3); 0,5 și că $xy + zx + yz = 54$.

9. Fie $a, b, c, x, y, z \neq 0$. Dacă $\frac{a-x}{y} = \frac{b}{a}, \frac{b-y}{z} = \frac{c}{b}, \frac{c-z}{x} = \frac{a}{c}$, să se arate că:

$$2(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2.$$

10. Diferența a două numere este 700, iar câtul lor este 8. Să se afle cele două numere.

11. Se dau numerele naturale nenule a, b, c, d , astfel încât $b = 2a, 3b = 2c, 4c = 3d$.

a) Să se arate că $b^2 = ad$.

b) Să se afle numerele a, b, c, d , știind că $a + b + c + d = 60$.

12. Știind că numerele 4830, 448230 și 44482230 sunt produse a câte două numere naturale consecutive, să se afle aceste numere consecutive.

13. Să se rezolve ecuația:

$$1\frac{1}{7} + \left(\frac{55}{16} : \frac{\sqrt{756,25}}{\frac{3}{2}x - 9} \right) \cdot \frac{16}{21} = 2.$$

14. Să se calculeze x din proporția:

$$\frac{\sqrt{224}_{(5)}}{0,1458(3)} = \frac{11202_{(3)}}{\frac{x}{24}}.$$

15. Să se calculeze:

$$a = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{3}{5}\right)\left(1 + \frac{3}{5}\right)}{\left(1 + \frac{4}{5}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right)}}; \quad b = \sqrt{\frac{\sqrt{1,21} - 0,1}{\sqrt{1,96} - 1,15}}.$$

Să se arate că $b - a = \frac{2}{3}$.

16. Să se arate că numărul:

$$N = \sqrt{16} + \sqrt{\frac{5}{0,0(2)}} + \sqrt{\frac{55}{0,0(02)}} + \sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$$

este pătrat perfect.

17. Se dă raportul $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, $m, n \neq 0$. Să se calculeze:

$$\frac{x-y}{x+y}, \frac{px+qy}{px-xy}, \frac{px+qy}{rx+sy} \quad (px \neq qy, rx + sy \neq 0).$$

18. a) Vitezele pe jos, călare și cu bicicleta sunt direct proporționale cu numerele $2\frac{1}{2}$, 5 și 6.

Viteza pe jos fiind de 5 km/h, să se afle viteza călare și viteza cu bicicleta.

b) De la gară la un sat se poate ajunge cu bicicleta cu 18 minute mai repede decât călare. Care este distanța de la gară până în sat?

19. După două reduceri de prețuri, un pardesiu costă 612 lei. Știind că prima reducere a fost de 15%, iar a doua reducere de 10%, să se afle cât a costat pardesiul înainte de reducerea prețurilor.

20. La o fabrică de sticlă se comandă 300 t sticlă. Sticla se prepară din 68 părți nisip, 36 părți sodă și 20 părți var. Câte kilograme sunt necesare din fiecare fel?

21. Un casier a încasat o anumită sumă de bani. Dacă ar mai încasa încă un sfert din cât a încasat și în plus 500 lei, atunci ar fi încasat 5500 lei. Cât a încasat în fapt casierul?

22. La o fermă s-au însămânțat $\frac{2}{5}$ din terenul arabil cu porumb, $\frac{1}{2}$ din rest cu grâu, $\frac{1}{2}$ din noul rest cu orz și restul de 18 ha cu ovăz. Să se afle suprafețele repartizate pe cele 4 culturi.

5. Mărimi direct și invers proporționale

Regula de trei simplă; regula de trei compusă

Probleme

1. Un litru de lapte conține 134 grame smântână. Câți litri de lapte conțin 1 kg de smântână?

2. Media aritmetică a trei numere naturale este 32. Primul număr este mai mare de două ori decât al doilea, iar media aritmetică între al doilea și al treilea număr este 35. Să se afle numerele.

3. O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimiși în altă parte să lucreze. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii care au rămas?

4. Trei muncitori pot termina o lucrare în opt zile. Câți muncitori vor termina o lucrare de două ori și jumătate mai mare în șase zile?

5. Dacă 15 țesătoare au țesut 2280 m de pânză în 16 zile, câte țesătoare vor țese 1596 m de pânză în 24 zile?

6. Să se găsească patru numere întregi care să fie invers proporționale cu numerele 7, 8, 9 și 10. Să se arate că avem un număr nesfârșit de soluții. Care sunt cele mai mici numere care îndeplinesc aceste condiții?
7. O fabrică vinde 45360 bucăți de săpun de două calități: de 6 lei bucata și de 4 lei bucata. Ea încasează în total 211680 lei. Câte bucăți au fost din fiecare calitate?
8. Două categorii de piese cântăresc respectiv câte 9 kg și 23 kg fiecare. Dacă 100 de piese din ambele categorii cântăresc în total 1390 kg, să se afle câte piese sunt din fiecare categorie.
9. Un camion parcurge distanța de 188 km în 4 ore. O parte din drum merge cu viteza de 42 km/h, iar a doua parte din drum cu viteza de 50 km/h. Ce distanță a parcurs cu prima viteză și ce distanță cu a doua?
10. Un bilet de stal costă 5 lei, iar unul de lojă 7 lei. Știind că într-o clasă s-au cumpărat 11 bilete în valoare de 65 lei, să se afle câte bilete de 5 lei și câte de 7 lei s-au cumpărat.
11. O sumă de 1800 lei a fost plătită în monede de 25 lei și 3 lei. Știindu-se că în total au fost 182 de monede, să se afle câte monede de 25 lei și câte de 3 lei au fost plătite.
12. O brigadă de 12 lucrători poate termina săpatul unui canal în 25 de zile. După ce brigada lucrează 5 zile, 6 lucrători pleacă la altă lucrare. În câte zile se va termina săpatul acestui canal?

6. Utilizarea principiului cutiei în rezolvarea problemelor

I. Introducere

Principiul cutiei este cunoscut și sub numele de principiul sertarelor, sau al porumbelilor și coliviilor. Acest principiu a fost folosit pentru prima dată în anul 1834 la demonstrarea unor rezultate ale teoriei numerelor (mai exact, la găsirea soluțiilor ecuației lui Pell), de către matematicianul german Dirichlet (1805-1859), astfel încât mai este numit și principiul lui Dirichlet. Dirichlet însuși l-a numit principiul sertarelor. Sub denumirea de principiul lui Dirichlet apare în ediția din 1863 a lui Dedekind a cărții *Vorlesungen über Zahlentheorie (Lectures on Number Theory – Prelegeri de teoria numerelor)*.

Apoi, în 1905, apare într-o lucrare de teoria numerelor a lui Bachmann (care face aluzie la principiul lui Dirichlet), precum și în Geometria numerelor a lui Minkowski, în 1910, care pomenește vestita metodă a lui Dirichlet. Se mai folosește într-o lucrare de aproximarea numerelor, prin 1940.

Începând cu 1953 apare frecvent, impus mai ales de Paul Erdős (1913-1996) în combinatorică.

II. Forme ale Principiului Cutiei

Enunțul acestui principiu este următorul:

(P_1 – forma slabă). Dacă $n + 1$ obiecte sunt repartizate în n cutii, atunci există cel puțin o cutie care conține mai mult de un obiect.

În limbajul mulțimilor, acest principiu se enunță astfel:

Dacă o mulțime A este reuniunea a n submulțimi, disjuncte două câte două, atunci oricare ar fi $n + 1$ elemente din mulțimea A , există cel puțin 2 dintre ele în aceeași submulțime.

Să revenim la modul de redare a lui prin referire la obiecte concrete. O formă mai simplă este următoarea:

Dacă vrem să punem trei bile în două cutii, va fi necesar să punem într-o cutie două bile.

O formă mai generală a acestui principiu este:

(P_1 – mai generală) Dacă repartizăm $n \cdot k + 1$ obiecte în n cutii, atunci există cel puțin o cutie în care sunt cel puțin $k + 1$ obiecte.

Observație. Fie numerele naturale nenule n și $m_1, m_2, \dots, m_n$ și fie $x_1 \leq m_1 - 1, x_2 \leq m_2 - 1, \dots, x_n \leq m_n - 1$ numere nenegative. Atunci avem:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \dots + m_n - n.$$

Teoremă. Fie $m_1, m_2, \dots, m_n$ numere naturale nenule. Dacă repartizăm $m_1 + m_2 + \dots + m_n - n + 1$ obiecte în n cutii, atunci fie în prima cutie avem cel puțin m_1 obiecte, fie în cea de-a doua cutie avem cel puțin m_2 obiecte, ..., fie în cea de-a n -a cutie avem cel puțin m_n obiecte (ordinea cutiilor este aleatoare).

Demonstrație. Presupunem (prin reducere la absurd) că pentru orice k , în cutia k avem cel mult $m_k - 1$ obiecte (negația afirmației teoremei). Atunci, în cele n cutii vom avea în total cel mult $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_n - 1) = m_1 + m_2 + \dots + m_n - n$ obiecte, ceea ce contrazice ipoteza, care spune că avem $m_1 + m_2 + \dots + m_n - n + 1$ obiecte.

Particularizări ale teoremei

1. Fie $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 2$. Atunci $m_1 + m_2 + \dots + m_n - n + 1 = n \cdot 2 - n + 1 = n + 1$ și astfel obținem enunțul principiului cutiei în forma dată la început (P_1).

2. Fie $m_1 = m_2 = \dots = m_n = k + 1$. Acum obținem

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n - n + 1 = n \cdot (k + 1) - n + 1 = n \cdot k + 1,$$

adică enunțul principiului sub forma (P_2).

După cum se constată din practică, **difficultatea utilizării acestui principiu** (pe cât de simplu, pe atât de eficient), **constă în identificarea corectă a cutiilor și a obiectelor.**

III. Probleme

1. Să se arate că într-un grup de 8 persoane există cel puțin două care au ziua de naștere în aceeași zi a săptămânii.
2. Să se arate că într-un grup de 37 de elevi, cel puțin 4 au ziua de naștere în aceeași lună.
3. Într-un săculeț sunt 9 bile numerotate de la 1 la 9. Extragem la întâmplare 7 bile din săculeț. Să se arate că:
 - a) cel puțin o bilă are scris pe ea un număr divizibil cu 3;
 - b) folosind cifre scrise pe bilele extrase, se pot forma cel puțin trei numere divizibile cu 3.

Olimpiada de Matematică, Etapa pe municipiu, București, 1995 (enunț modificat)

4. Să se arate că oricum am alege 11 numere din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 19\}$, există printre ele două a căror sumă este 20.
5. Să se arate că oricum am alege 16 numere din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$, există printre ele două a și b astfel încât $a \mid b$.
6. Dacă X este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, definim S_X ca fiind suma elementelor submulțimii X . (De exemplu, dacă $X = \{1, 4, 7, 8\}$, atunci $S_X = 1 + 4 + 7 + 8 = 20$, iar dacă $X = \emptyset$, atunci $S_\emptyset = 0$.) Să se arate că oricum am alege 26 de submulțimi de maximum 3 elemente din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$, există două submulțimi A și B astfel încât $S_A = S_B$.
7. Să se arate că oricum am pune 106 bile de 3 culori în 5 cutii, va exista cel puțin o cutie cu cel puțin 8 bile de aceeași culoare.
8. În jurul unei mese rotunde cu 36 de locuri se află 19 fete și 17 băieți. Să se arate că oricum s-ar așeza, cel puțin 2 fete se vor afla față în față (pe locuri diametral opuse).

Georgeta Alexandrescu și Niculaie Marin Goșoniu, Etapa locală, București, 2009

9. Având musafiri, o gazdă pregătește o masă rotundă (și care se poate roti) pe care așază 18 carduri cu numele fiecărui invitat, în dreptul unui scaun. Cei 18 musafiri au observat cardurile abia după ce s-au așezat, când au constatat că **niciunul** dintre ei **nu s-a așezat pe locul ce-i fusese rezervat**. Dorind să reducă numărul celor care se ridică (sau poate pentru a micșora dezordinea), gazda (care, probabil, mai trecuse prin această experiență) propune să rotească masa (cu câte un loc!) până când vor fi cel puțin doi invitați corect așezați. Să se arate că acest lucru este cu putință: există întotdeauna o poziție a mesei astfel încât cel puțin două persoane sunt corect așezate.

10. În vederea pregătirii unui concurs, un şahist își propune ca, pe parcursul a 5 săptămâni, să se antreneze analizând **zilnic cel puțin o partidă**, dar în total să nu depășească numărul de 50 de partide analizate. Să se arate că există o succesiune de zile pe parcursul căreia şahistul analizează exact 19 partide.

11. Se știe că o școală are exact 2007 elevi. Să se arate că cel puțin doi dintre elevii școlii, au același număr de prieteni. (Se presupune că dacă elevul A este prietenul elevului B , atunci și elevul B este prietenul elevului A . Un elev nu este prieten cu el însuși.)

12. a) Să se arate că oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte, printre ele există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 10.

b) Să se arate că oricum am alege 5 numere naturale pătrate perfecte, printre ele există cel puțin două a căror sumă sau diferență este divizibilă cu 10.

Doru Popescu Anastasiu, Concursul Nicolae Coculescu, Slatina, 30.XI.2007

13. Arătați că dintre 1003 numere naturale care împărțite la 2005 dau restul un număr natural impar, există cel puțin două numere a a căror diferență se împarte exact la 2005.

Revista *Arhimede* nr. 4-6/2006, Liviu Oprișescu, București

14. Să se arate că oricum am alege 504 numere naturale distincte nenule cel mult egale cu 2007, printre ele există două a căror diferență este 2, 3, 5 sau 8.

Niculaie Marin Gșoniu, Proba de baraj pentru IMAC-Gimnaziu, 22 iunie 2007

15. Se dă mulțimea $M = \{4, 44, 18, 25, \dots, 186, 193, 200\}$. Dacă A este o submulțime a lui M , iar $\text{card } A = 16$, să se arate că în A există două numere a căror sumă este 211.

16. Într-o sală avem 12 scaune așezate pe un rând. Să se arate că oricum s-ar așeza 9 oameni pe cele 12 scaune (câte o persoană pe un scaun), va exista un grup de 3 scaune consecutive ocupate.

17. Fie 10 bile colorate. Să se arate că există 4 bile colorate la fel sau 4 bile de culori diferite.

Etapa județeană, Județul Vâlcea, 1996

18. a) Să se arate că există un număr de forma $k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}$, care diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{1000}$.

b) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un număr de forma $k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}^*$, care diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{10^n}$.

Desigur că există exemple din geometrie – cu puncte în interiorul unui triunghi echilateral, în interiorul unui pătrat, al unui cub sau unei sfere etc.

Principiul cutiei este o sursă de inspirație pentru cei care compun probleme. De-a lungul timpului acest principiu a fost cheia multor probleme date la concursuri, așadar el prezintă un interes deosebit. Faptul că înțelegerea lui nu necesită cunoștințe sofisticate nu-i scade valoarea și-l face accesibil elevilor de gimnaziu și chiar celor de la ciclul primar. Problemele ce se pot rezolva cu ajutorul lui, pun la încercare perspicacitatea și imaginația rezolvitorilor, constituind un bun exercițiu mental și conducând la ridicarea nivelului de inteligență al elevilor.

7. Exerciții și probleme recapitulative

1. Să se determine următoarele mulțimi de numere:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} < 4\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq \sqrt{2x-1} \leq 6\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 17 < x^2 < 50\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x^3 < 1001\}.$$

2. Să se determine $x \in \mathbb{N}$ care adunat cu 56 să dea un pătrat perfect, iar adunat cu 113 să dea alt pătrat perfect.

3. Fie n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Dovediți că:

a) 2^n se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive;

b) 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale consecutive.

4. O fabrică de confecții a primit într-o zi stofă în valoare de 127000 lei. Știind că un sfert din stofă a fost de 400 lei metrul, o treime de 275 lei metrul, iar restul de 175 lei metrul, să se afle câți metri de stofă au fost de fiecare calitate.

5. Să se arate, fără a efectua calculele, că expresia:

$$E = 1001^1 + 2002^2 + 3003^3 + 4004^4 - 1$$

nu poate fi un pătrat perfect.

6. Să se determine următoarele mulțimi de numere:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 17 < x + 1 < 23\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < 2x - 1 < 11\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < 3x + 2 < 20\}.$$

Ce relații există între ele?

7. Fie A mulțimea numerelor de forma $\overline{7a8b}$ care se divid cu 15 și B mulțimea numerelor de forma $\overline{7x8y}$ care se divid cu 40. Să se determine mulțimile:

$$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

8. Să se afle numărul zerourilor cu care se termină produsul:

$$P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100.$$

9. a) Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

$$x - \{19095 : 335 - 2^2 \cdot [2 \cdot 5 + (2^3 \cdot 5^2)^{25} : (2^{73} \cdot 5^{50})]\} \cdot 5 \leq 5.$$

b) Determinați mulțimile A și B , astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\};$

2) $A \cap B = \{a, b\};$

3) $A \setminus B = \{c, d\}.$

10. O lingură și o linguriță costă împreună 15 lei, o linguriță și o furculiță costă 12 lei, iar o furculiță și o lingură costă 17 lei. Ce preț are fiecare?

11. Pentru 10 probleme bine rezolvate și 3 probleme greșite un elev obține 41 de puncte. Un alt elev obține 24 de puncte pentru 6 probleme bune și 2 greșite. Câte puncte se vor acorda pentru 8 probleme bine rezolvate și una greșită?

12. Să se determine x , astfel ca mulțimile:

$$A = \left\{ \sqrt{0,0625 \cdot \frac{12}{0,(3)}}; 0,3(15) \cdot 3 \frac{9}{52} \right\} \text{ și } B = \left\{ \sqrt{3^2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 5^2}; x \right\}$$

să aibă aceleași elemente.

13. Să se arate că pentru $x > 1, x \in \mathbb{N}$, fracția:

$$F = \frac{\overline{24}_x}{25_x - 2_x}$$

este ireductibilă.

14. Să se afle valorile lui n care verifică ecuația:

$$\frac{n(n-1)+1}{n(n-1)+3} = \frac{n(n-1)+2}{n(n-1)+6}.$$

15. Să se compare numerele:

$$A = a^{(1-\sqrt{3})^2}, B = \left(\frac{a^2}{a^{\sqrt{3}}} \right)^2, \text{ unde } a > 0.$$

16. Să se afle numerele naturale p și q , știind că verifică egalitatea:

$$pq = 2(p + q + 1).$$

17. În cadrul unui campionat de volei participă un număr impar de echipe. Fiecare echipă a jucat un meci cu toate celelalte. Știind că au avut loc 55 de meciuri, să se afle numărul echipelor participante.

18. Cum putem aduce 6 ℓ de apă de la râu dacă avem numai un vas de 4 ℓ și unul de 9 ℓ ?

19. Cum putem aduce de la râu 17 ℓ de apă cu ajutorul a doua vase de 11 ℓ și respectiv de 9 ℓ ?

20. Cum putem măsura 5 dm^3 de apă, având la dispoziție doua vase: unul de 3 ℓ și altul de 7 ℓ ?

21. Să se efectueze operațiile din expresia:

$$E = 5 + \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{0,3(7)} : \frac{1}{340} - \frac{1}{0,01} \right)}.$$

Dacă numărul găsit reprezintă perimetrul unui triunghi oarecare ABC , ale cărui laturi verifică relațiile: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$; $\frac{b}{6} = \frac{c}{8}$, să se afle laturile acestui triunghi.

22. Pe o linie dublă de cale ferată, un tren accelerat lung de 60 m depășește un tren de persoane lung de 80 m și care merge în același sens, în 28 de secunde. Același tren accelerat întâlnește la întoarcere ternul de persoane pe lângă care trece în 4 secunde. Care sunt vitezele celor două trenuri?

23. Aflați numărul $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{5\sqrt{abcd}}$ este număr natural.

24. Fie expresia $E(x)$ care îndeplinește condiția:

$$E(x) = E(x-1) + 2, \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $E(100) - E(0)$.

25. Un tren lung de 135 m depășește un pieton, care se deplasează cu o viteză de 10 ori mai mică, în 10 secunde. Să se afle care este viteza trenului și cea a pietonului.

26. Pentru evidențierea elevilor colaboratori la Gazeta matematică se acordă 10 puncte la fiecare problemă bine rezolvată și se scad 3 puncte pentru fiecare problemă greșită. Un elev a obținut 261 de puncte în urma trimerii a 30 de probleme. Câte probleme a rezolvat corect și câte a greșit?

27. Să se calculeze:

$$S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{100}],$$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .

28. Determinați $a \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fracția:

$$\frac{an - 1 + (a - 1)(-1)^{n-1}}{a}$$

să fie un număr întreg.

29. Să se dea exemple de numere x, y, z , astfel încât:

$$\sqrt{x} < x; \sqrt{y} = y \text{ și } \sqrt{z} > z.$$

30. Să se rezolve fără a folosi scrierea zecimală ecuația:

$$\frac{\overline{abcd}^2 - \overline{abcd}}{\overline{abcc}^2 + \overline{abcc}} \cdot (x - 1) = \left(\frac{1}{a^n} - \frac{a-1}{a^{n+1}} \right) \cdot \left(\frac{b+1}{b^{n+1}} - \frac{1}{b^n} \right) \cdot (ab)^{n+1},$$

în care x este un număr real necunoscut, n un număr natural fixat, a, b , cifre nenule, iar c și d cifre consecutive ($c < d$). Numerele sunt scrise în baza zece.

31. Să se rezolve ecuația, știind că $[x]$ este partea întreagă a numărului real x :

$$2[x] + 3 = 4x.$$

32. Să se rezolve ecuația:

$$x + 2x + 3x + \dots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101.$$

33. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] = x + 1.$$

34. Un biciclist urcă drumul de la A la B cu viteza de 8 km/h și coboară de la B la A cu viteza de 26 km/h. Știind că timpul de parcurgere a drumului AB este cu 9 ore mai mare decât a drumului BA , să se afle lungimea drumului AB .

35. Să se arate că numărul:

$$N = 111^1 + 222^2 + 333^3 + 444^4 + 555^5 - 12345$$

nu este pătrat perfect.

36. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sqrt{7225}}{11} + \frac{\sqrt{28900}}{23} + \frac{\sqrt{226576}}{x} = 17.$$

37. Se dă expresia:

$$E(x, y) = \frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}} \cdot \left(\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y} \right).$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

- b) Să se rezolve ecuația: $\frac{aE + bx}{x - a} = E$, unde E este expresia dată.
 c) În ce condiții există soluția x ?

38. Să se determine mulțimea X care satisface simultan condițiile:

- a) $X \subset \{2, 3, 4, 6\}$;
 b) $X \subset \{2, 4, 5\}$;
 c) $\{2, 4\} \subseteq X$.

39. Dacă la un număr de cinci cifre punem în dreapta cifra 9, obținem un număr de 4 ori mai mic decât s-ar obține punând cifra 9 în stânga numărului. Să se afle acest număr.

40. Să se determine mulțimea:

$$M = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid y = \frac{6n + 15}{2n + 1}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

41. Să se determine mulțimile A și B , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- 1) $A \cup B = \{a, b, c, d\}$;
 2) $A \setminus B = \{a, b\}$;
 3) $A \cap B = \{c, d\}$.

42. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{2n + 6}{n + 1}, n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$B = \left\{ [\sqrt{6}], [\sqrt{31}], [7, 9] \right\}, \text{ unde } [x] \text{ este partea întreagă a lui } x;$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2a + 1, a \in A\}.$$

Să se calculeze: $A \cup B, B \cap C, A \setminus C, B \times C$.

43. Știind că: $\overline{\overline{A}} = 16, \overline{\overline{B}} = 17$ (unde $\overline{\overline{A}}$ înseamnă cardinalul mulțimii A):

- a) să se calculeze: $\overline{\overline{A \cap B}}, \overline{\overline{A \setminus B}}, \overline{\overline{B \setminus A}}$ când $\overline{\overline{A \cup B}} = 20$;
 b) să se calculeze: $\overline{\overline{A \cap B}}, \overline{\overline{A \setminus B}}, \overline{\overline{A \times B}}$ când $\overline{\overline{A \cup B}} = 31$.

44. Să se determine mulțimile A, B și C , știind că satisfac simultan condițiile:

- a) $A \cup B = B \cup C = C \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; b) $A \cap B \cap C = \emptyset$;
 c) $B \cap C = \{3, 4\}$; d) $A \setminus C = \{1, 5\}$.

45. În patru săli de clasă se află 121 de elevi. Să se arate că există o clasă cu cel puțin 31 de elevi.

46. Într-o clasă sunt 37 de elevi. Să se arate că dintre aceștia cel puțin 4 sunt născuți în aceeași lună.

47. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la fiecare din numerele 7, 8, 9 să dea restul 1.

48. Să se determine numerele naturale n și $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} \cdot n = \overline{a0b}$.

49. Demonstrați că nu există pătrate perfecte de forma $5n + 2$ sau $5n + 3$ ($n \in \mathbb{N}$).

50. Fie fracția:

$$F = \frac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fracția este reductibilă.

51. Să se arate că numerele de forma $5^{n+3} \cdot 2^n - 125$, cu $n \in \mathbb{N}$, sunt divizibile prin 1125.

52. Un teren agricol a fost cultivat în felul următor: jumătate din teren și încă 50 ha au fost cultivate cu grâu. Jumătate din rest și încă 50 ha cu porumb, iar jumătate din noul rest și ultimele 50 ha cu cartofi. Să se afle câte hectare avea terenul agricol.

53. Media proporțională a numerelor 60 și x este un număr natural mai mic decât 100. Să se afle x .

54. Să se determine x din proporția:

$$\frac{x + \sqrt{\frac{146,41}{121}}}{x - 0,5(6)} = \frac{3}{2}.$$

55. Să se determine numerele a, b, c , știind că:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} \text{ și } abc = 576.$$

56. Fie a, b, c trei numere nenule, astfel încât:

$$2a = 5b = 9c = x(a + b + c).$$

Să se determine valoarea lui x .

57. Să se afle numerele naturale x și y astfel ca:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}, \quad \frac{4x + y + 5(x + y)}{24} = 3.$$

58. Să se determine numerele naturale p și q , astfel încât:

$$5^{p+1} + 3 = 2(5^q - 5^p).$$

59. Să se demonstreze că nu există niciun număr natural care împărțit la 10 să dea restul 3 și împărțit la 15 să dea restul 4.

60. Să se arate că, oricum am lua 11 numere naturale cuprinse între 1 și 100, există cel puțin două a căror diferență nu depășește pe 9 și cel puțin două a căror diferență se divide la 10.

61. Numerele reale nenule a, b, c satisfac relațiile:

$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c}.$$

Ce valori poate lua produsul:

$$P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}?$$

62. Fie $a, b, c > 0$. Să se determine numerele x, y, z proporționale cu a, b, c , știind că îndeplinesc condiția:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c).$$

63. a) Fie numerele pozitive nenule a și b , astfel încât $\frac{a}{4} = \frac{b}{2}$. Să se verifice dacă:

$$\frac{a}{a+b} < \frac{a^2}{a^2+b^2} < \frac{a^3}{a^3+b^3}, \quad (1).$$

b) Să se arate că dacă $a, b > 0$, atunci inegalitățile (1) au loc dacă și numai dacă $0 < b < a$.

64. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \left[\frac{3}{3} \right] + \left[\frac{4}{3} \right] + \dots + \left[\frac{101}{3} \right];$$

$$S_2 = \left[\frac{4}{4} \right] + \left[\frac{5}{4} \right] + \dots + \left[\frac{102}{4} \right].$$

GEOMETRIE PLANĂ

1. Unghiuri Triunghiuri Drepte paralele

1. Se dă un unghi drept ABC și o semidreaptă BD în interiorul lui. Să se arate că simetricele acestei semidrepte față de laturile unghiului sunt în prelungire. Ce devine acest rezultat dacă unghiul ABC are 45° ?
2. Unghiurile A, B, C ale unui triunghi sunt proporționale cu numerele 11, 4, 3. Se prelungește bisectoarea AD cu un segment $[DE] \equiv [BD]$, iar din E ducem perpendiculara EF pe BC . Să se calculeze măsura unghiului BEF .
3. Fie unghiul AOB cu măsura de 150° și C intersecția mediatoarelor segmentelor OA și OB . Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.
4. Se dă unghiul drept xOy și se consideră punctul A pe Ox și B pe Oy . Se notează cu I intersecția dintre bisectoarea unghiului dat și mediatoarea lui AB și cu d distanța de la punctul I la Ox și respectiv Oy . Să se arate că $OA + OB = 2d$.
5. Dacă A_1, A_2 sunt respectiv simetricele lui A față de B și C în triunghiul ABC , să se determine pe latura BC un punct M , astfel ca suma $MA_1 + MA_2$ să fie minimă.
6. Într-un patrulater convex, înscris într-un cerc, trei unghiuri consecutive sunt direct proporționale cu numerele 5, 12, 13. Să se determine unghiurile patrulaterului.
7. Dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt proporționale cu numerele 1, 2 și 3, atunci triunghiul este dreptunghic.
8. În triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se duc înălțimile $AD, A'D'$ și medianele BE și $B'E'$. Să se demonstreze că aceste triunghiuri sunt congruente dacă:
 - a) $AB = A'B'; AC = A'C'$ și $AD = A'D'$;
 - b) $AB = A'B'; AC = A'C'$ și $BE = B'E'$.
9. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Să se arate că $m(\sphericalangle C) < 30^\circ$ dacă și numai dacă $BC > 2AB$.
10. Fie AM bisectoarea unghiului A în triunghiul oarecare ABC . Să se arate că $AB < AC$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)$.

11. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC și unghiurile de la bază de câte 80° fiecare. Se duc semidreptele BM și CN ($M \in AC$, $N \in AB$), astfel încât $m(\sphericalangle ABM) = 20^\circ$ și $m(\sphericalangle ACN) = 30^\circ$. Să se afle $m(\sphericalangle ANM)$.

12. Fie patrulaterul $ABCD$. Paralela prin B la latura AD intersectează diagonala AC în E , iar paralela prin A la latura BC intersectează diagonala BD în F . Să se arate că EF și CD sunt paralele.

13. Se consideră triunghiul echilateral ABC . Pe segmentul AB se ia punctul M , pe segmentul BC se ia punctul N și pe segmentul CA se ia punctul P , astfel ca $AM = BN = CP$. Notăm $MC \cap PB = \{E\}$; $AN \cap PB = \{F\}$; $MC \cap AN = \{G\}$. Să se arate că triunghiul EFG este echilateral.

14. Se dă un triunghi echilateral ABC de latură a și se prelungește latura AB cu un segment BD egal cu $2a$, iar latura AC cu un segment CE egal cu a . Să se arate că segmentele DC și DE sunt egale.

15. Se dă un triunghi ABC în care unghiul CAB este de 60° . Înălțimile BB' și CC' se intersectează în H , iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălțimi BB' și CC' în O și E . Să se demonstreze că triunghiul OEH este echilateral.

16. Între un triunghi ABC dreptunghic în A , bisectoarea unghiului C intersectează pe AB în E și înălțimea din A pe BC în F . Să se arate că triunghiul AEF este isoscel.

17. Pe laturile BC și CD ale dreptunghiului $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale BCE și CDF . Să se arate că $FC \perp BE$ și $CE \perp DF$.

18. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A . Perpendicularele în B și C pe ipotenuză retează laturile AC , AB în B' , C' . Fie și AA' înălțimea din A . Notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Să se arate că:

$$AA' = \frac{bc}{a}, BB' = \frac{ac}{b}, CC' = \frac{ab}{c}.$$

N. Mihăileanu

19. Fie triunghiurile ABC și ABC' , astfel încât $AC = AC'$ și punctele $D \in (BC)$ și $D' \in (BC')$, astfel ca $BD = DC$ și $BD' = D'C'$. Să se arate că:

$$DD' < AB + AC.$$

20. Să se construiască triunghiul ABC , știind lungimea înălțimii $AD = h$ ($D \in BC$), a medianei $AM = m$ ($M \in BC$) și măsura unghiului $BAC = u$.

21. Pe laturile BA și CA ale triunghiului ABC luăm punctele M și N , astfel încât $BM \equiv CN$. Dacă P este mijlocul segmentului MN și Q mijlocul segmentului BC , atunci PQ este paralel cu bisectoarea AA' a unghiului A .

22. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca bisectoarea unghiului A , înălțimea dusă pe AC și mediatoarea laturii AB ale unui triunghi ABC să fie concurente este ca $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

23. Trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AB are diagonalele perpendiculare, E fiind punctul lor de intersecție. Fie F simetricul lui A față de E . Să se arate că dreptele BC și DF sunt perpendiculare.

24. Fie un triunghi oarecare ABC și o dreaptă oarecare care trece prin A . Notăm proiecțiile vârfurilor B și C pe această dreaptă cu M și N . Considerăm înălțimea AP . Să se arate că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea.

25. În triunghiul ABC , unghiul format de latura BC cu înălțimea CD este egal cu unghiul format de latura AB și bisectoarea AA' a unghiului A .

a) Ce fel de triunghi este ABC ?

b) Dacă $CD \cap AA' = H$, să se arate că $BH \perp AG$.

26. Într-un triunghi oarecare ABC , fie I punctul de intersecție a bisectoarelor AA' , BB' , CC' . Să se arate că avem: $IA > IA'$; $IB > IB'$; $IC > IC'$.

27. Fie triunghiul ABC , mediana AA' și $M \in AA'$ care împarte segmentul AA' în raportul k . Dreapta BM intersectează pe AC în N . Care este raportul în care N împarte segmentul AC ?

28. Pe latura AB a unui triunghi echilateral ABC se consideră un punct mobil M , iar pe latura AC un punct P , astfel încât $[PC] \equiv [AM]$. Să se demonstreze că:

$$\sphericalangle PBC + \sphericalangle MCB = \text{const.}$$

29. Dacă într-un triunghi de laturi a, b, c notăm $a + b + c = 2p$, atunci:

$$2a(p - c) + 2b(p - a) + 2c(p - b) = a^2 + b^2 + c^2.$$

30. Să se construiască un triunghi, cunoscând perimetrul și unghiurile sale.

31. Fie d_1 și d_2 două drepte în plan care au următoarea proprietate: orice dreaptă din plan care intersectează pe una din dreptele d_1 sau d_2 o va intersecta și pe cealaltă. Să se arate că $d_1 \parallel d_2$.

32. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD , $D \in BC$. Din D se duc dreptele DE și DF paralele cu AC și respectiv AB . Să se arate că patrulaterul $AEDF$ este romb.

33. Fie ABC un triunghi și $M \in AC$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle CMB$ intersectează laturile AB , respectiv BC în P și Q . Să se arate că dreapta PQ este paralelă cu AC dacă și numai dacă M este mijlocul lui AC .

34. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC și $N \in (AB)$, $P \in (AC)$, astfel încât MN și MP sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$. Să se demonstreze că $NP \leq AM$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle A) \leq 90^\circ$, cu egalitate doar pentru $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

35. Fie ABC un triunghi și AD mediana corespunzătoare laturii BC . Să se arate că:

$$\text{a) } m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{BC}{2};$$

$$\text{b) } m(\sphericalangle A) < 90^\circ \Leftrightarrow AD > \frac{BC}{2};$$

$$\text{c) } m(\sphericalangle A) > 90^\circ \Leftrightarrow AD < \frac{BC}{2}.$$

36. Fie un triunghi oarecare ABC și M un punct pe BC . Punctul M se proiectează pe AB în N , iar perpendiculara în M pe BC și paralela prin A la BC se taie în P . Să se arate că $NP \leq AM$. În ce caz avem egalitate?

37. Fie AD mediană în triunghiul ABC . Să se arate că orice paralelă EF la BC este tăiată de AD la jumătate.

38. Fie $ABCD$ un trapez oarecare ($AB \parallel CD$), F punctul de intersecție a laturilor neparalele AD și BC , O intersecția diagonalelor, iar F și G mijloacele bazelor. Să se arate că punctele E, F, O, G sunt coliniare.

39. Fie AM mediană în triunghiul ABC și $O \in AM$. Dacă BO intersectează pe AC în E , CO pe AB în F , atunci $EF \parallel BC$. Reciproc, dacă $EF \parallel BC$, atunci CF, BE și mediana AM sunt concurente.

40. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele AB și CD , O intersecția diagonalelor, iar $EO \parallel AB$ ($E \in AD$). Să se demonstreze relația:

$$\frac{1}{EO} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

41. Să se demonstreze că într-un trapez paralela la baze dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor determină pe laturile neparalele segmente proporționale cu bazele.

42. Dacă baza mare BC a unui trapez este fixă, iar baza mică AD , este de mărime constantă și se deplasează pe dreapta AD , să se afle locul geometric al punctului O de intersecție a diagonalelor.

43. Fie triunghiul ABC și AA' mediană, $D \in AA'$, astfel încât $\frac{AD}{AA'} = \frac{m}{n}$. Prin D se duce o dreaptă care intersectează AB și AC respectiv în P și Q . Să se demonstreze relația:

$$\frac{BP}{PA} + \frac{QC}{QA} = 2 \left(\frac{n}{m} - 1 \right).$$

44. Se dă pătrat cu latura 1. Să se găsească locul geometric al punctelor, astfel încât suma distanțelor de la acest punct până la laturile pătratului sau la prelungirile lor să fie egală cu 4.

45. Fie patrulaterul convex $ABCD$, M mijlocul laturii DC , N mijlocul laturii BC și $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă O este centrul de greutate al triunghiului AMN , atunci $ABCD$ este paralelogram.

46. Fie $ABCD$ un paralelogram, P un punct nesituat pe niciuna din dreptele suport ale laturilor și diagonalelor, M_1, M_2, M_3 și M_4 mijloacele segmentelor PC, PD, PA și PB . Să se arate că dreptele AM_1, BM_2, CM_3 și DM_4 sunt concurente.

47. Fie triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$, $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$). Perpendicularele în A pe AB și AC întâlnesc înălțimile din B și C în B' , respectiv C' . Fie H punctul de intersecție a celor două înălțimi. Să se arate că:

- a) $AH \perp BC$;
- b) patrulaterul $AB'HC'$ este romb;
- c) $B'C' \parallel BC$.

48. Fie triunghiul oarecare ABC și punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Dreptele DE și DF taie paralela prin A la BC respectiv în M și N . Să se arate că $AM = AN$ dacă și numai dacă dreptele AD, BE și CF sunt concurente.

49. Fie $ABCD$ un patrulater în care $m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ$, $[AB] \equiv [AD]$, $[BC] \equiv [CD] \equiv [BD]$. Punctul O este punctul de intersecție a diagonalelor, iar M, N, P mijloacele segmentelor AD, BC, AC .

- a) Să se arate că patrulaterul $MNPO$ este paralelogram.
- b) Să se determine unghiurile acestuia.

50. În paralelogramul $ABCD$ unghiul A are 60° și $AB = 2AD$. Fie M și N mijloacele laturilor AB și CD , Q intersecția dintre AN și BC , iar P intersecția lui MQ cu DC . Să se arate că BP și DC sunt perpendiculare.

51. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA ale patrulaterului convex $ABCD$. Notând $AC \cap BD = \{S\}$, să se arate că $m(\sphericalangle ASD) > 90^\circ$ dacă și numai dacă $MP > NQ$.

52. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu unghiurile B și D mai mari decât un unghi drept. Să se arate că $BD < AC$.

53. În dreptunghiul $ABCD$ bisectoarea unghiului B și diagonala care pleacă din acest vârf fac între ele un unghi de 15° . Bisectoarea întâlnește diagonala AC în P și latura DC în E . Să se arate că triunghiurile COE și POE sunt isoscele, O fiind intersecția diagonalelor.

54. Fie dreptunghiul $ABCD$, E și F mijloacele laturilor AD , respectiv DC . Să se demonstreze că drepte BE și BF determină pe diagonala AC trei segmente congruente.

55. Fie pătratul $ABCD$ și M mijlocul laturii AB . Dreapta DM taie perpendiculara din A pe diagonala AC în N . Să se arate că C , B , N sunt puncte coliniare.

56. Un trapez isoscel are baza mare de trei ori cât baza mică, iar înălțimea dublul bazei mici. Să se demonstreze că diagonalele sunt perpendiculare.

57. Fie $ABCD$ un paralelogram și O un punct oarecare al diagonalei AC . Notăm cu M , N , P și Q proiecțiile punctului O pe dreptele AB , BC , CD și DA . Să se arate că $MNPQ$ este trapez.

58. Într-un patrulater convex suma produselor laturilor opuse este mai mare sau egală cu produsul diagonalelor. Egalitatea are loc în cazul patrulaterului inscriptibil (teorema lui Ptolemeu).

59. a) Un poligon convex cu n laturi este inscriptibil dacă și numai dacă mediatoarele tuturor laturilor sunt concurente.

b) Un poligon convex cu n laturi este circumscriptibil dacă și numai dacă bisectoarele tuturor unghiurilor sunt concurente.

60. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu AB baza mică și construim în exterior pătratul $ABEF$. Atunci $[CE] \equiv [DF]$.

61. Fie un triunghi isoscel ABC , cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Pe laturile AB , AC construim în afară triunghiurile echilaterale ABD și ACE . AD întâlnește pe CE în M . Să se demonstreze că:

a) $AM \perp CE$;

b) patrulaterul $BCDE$ este trapez isoscel.

62. Să se arate că dacă segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex este egal cu semisuma celorlalte două laturi, atunci patrulaterul este trapez.

63. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$. Paralela la BC care trece prin A taie diagonala BD în E , iar paralela la AD care trece prin B taie diagonala AC în F . Să se demonstreze că drepte CD și EF sunt paralele.

64. Pe diagonala AC a pătratului $ABCD$ se iau punctele E și F astfel ca $[AE] \equiv [CF] \equiv [AB]$. Să se arate că dreptele BE și DF sunt paralele.

65. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu baza mare $AB = 2a$, baza mică $CD = a$, iar diagonala AC bisectoarea unghiului A .

a) Să se arate că AC și BC sunt perpendiculare.

b) Să se calculeze perimetrul trapezului în funcție de a .

c) Diagonalele trapezului se taie în E . Să se găsească valoarea raportului $\frac{AE}{EC}$.

66. Pe latura BC a pătratului $ABCD$ se consideră punctul M . În semiplanul mărginit de dreapta AM care conține punctele C și D se iau punctele N și P , astfel încât $AMNP$ să fie pătrat. Ce descrie punctul P atunci când M parcurge segmentul BC ?

67. Să se demonstreze că un triunghi este echilateral dacă și numai dacă este îndeplinită condiția:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} = \frac{a + b + c}{3},$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului.

68. Să se demonstreze că dacă laturile a, b, c ale unui triunghi satisfac relația:

$$a^2b^2 + c^4 = b^4 + a^2c^2,$$

atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

69. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi satisfac relația:

$$\frac{a^2 - c^2}{b} - \frac{a^2 - b^2}{c} + c - b = 0,$$

este dreptunghic sau isoscel.

70. Să se demonstreze că triunghiul pentru care are loc una din următoarele relații între lungimile laturilor a, b, c :

$$(1) \frac{(m+1)a + b + c}{a} = \frac{a + (m+1)b + c}{b} = \frac{a + b + (m+1)c}{c};$$

$$(2) \frac{(m+1)a + b + c}{a + (m+1)b + c} = \frac{a + (m+1)b + c}{a + b + (m+1)c} = \frac{a + b + (m+1)c}{(m+1)a + b + c},$$

unde $m \in \mathbb{N}^*$, este echilateral.

2. Cercul

Patrulatere inscriptibile

1. Se dau două cercuri O și O' secante în punctele A și B . Prin A se duce o secantă care taie cercurile în C și C' . Să se arate că unghiurile OCB și $O'C'B'$ sunt egale.
2. Se dă triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ înscris în cercul O și care are latura bazei egală cu latura pătratului înscris în cerc. Să se afle unghiul format de tangentele duse în punctele A și C .
3. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Două drepte paralele duse prin punctele A și B intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele D și respectiv E . Să se arate că $AE \parallel CD$.
4. Laturile unui patrulater convex oarecare se prelungesc și se înscriu patru cercuri, fiecare tangent la una din laturi și prelungirii celorlalte două laturi alăturate. Să se demonstreze că centrele acestor cercuri se află pe același cerc.
5. În cercul O se înscrie pătratul $ABCD$. Prin B se duce o semidreaptă care intersectează diagonala AC în M , latura CD în N (N între C și D) și cercul în P , iar DP intersectează tangenta în C la cerc în Q . Să se demonstreze că triunghiul MDQ este isoscel, iar QN este perpendiculară pe MD .
6. Fie $ANCD$ un patrulater convex și bisectoarele unghiurilor sale care se intersectează determinând un patrulater $MNPQ$, astfel: bisectoarea din A intersectează bisectoarele din B și D în M și Q , iar bisectoarea din C intersectează pe cele din B și D în N și P . Să se arate că $MNPQ$ este inscriptibil.
7. Fie un triunghi ABC și o dreaptă oarecare care trece prin A . Notăm proiecțiile vârfurilor B și C pe această dreaptă cu M și N și fie AP înălțimea din A . Să se arate că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea.
8. Fie $ABCD$ un paralelogram și I punctul în care cercul circumscris triunghiului ABC intersectează a doua oară dreapta BD . Notăm cu E punctul de intersecție a dreptelor AI și CD , iar cu F punctul de intersecție a dreptelor CI și AD . Să se arate că:
 - a) patrulaterul $IEDF$ este inscriptibil;
 - b) dreptele EF și AC sunt paralele.
9. Fie ABC un triunghi oarecare și mediana AD ($D \in BC$). Dacă $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ$, atunci triunghiul este dreptunghic în A .
10. Pe mediana AD a triunghiului dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90^\circ$) se construiește un cerc de diametru AD . Să se precizeze punctele în care acest cerc taie laturile triunghiului ABC .

11. Se dă un triunghi ABC și se notează cu A' punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului. Să se arate că ortocentrul H , mijlocul M al laturii BC și punctul A' sunt coliniare.

12. Să se arate că dacă în triunghiul ABC există punctele M și N situate pe BC cu proprietatea că $[BM] \equiv [NC]$ și $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle NAC)$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

13. În triunghiul ABC , cu $AB < AC$, se consideră $E \in AC$ astfel ca $AE = AB$. Dacă D este intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC , iar O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci $DE \perp AO$.

14. Împărțim raza OA a unui cerc în trei părți egale $OB = BC = CA$. Perpendiculara în C pe OA taie cercul în D și E , iar BD reține cercul în F . Să se arate că $AE = EF$.

15. Pe înălțimea AD a unui triunghi ABC se consideră un punct M și distanțele de la D la BM și MC , DN , respectiv DP . Să se arate că triunghiul ABC este isoscel dacă și numai dacă $[DN] \equiv [DP]$.

16. Fie un triunghi ABC și T un punct arbitrar pe latura BC . Dreapta AT intersectează din nou cercul circumscris în A' . Să se arate că:

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{A'B}{A'C}.$$

17. Fie un triunghi oarecare și AA' înălțimea dusă din A pe BC . Notăm cu M și N proiecțiile lui A' pe AB , respectiv pe AC . Să se demonstreze că patrulaterul $BMNC$ este inscriptibil.

18. În triunghiul ABC , unghiul B este dublul unghiului A , iar mediatoarea laturii AB intersectează pe AC în D . Să se arate că BC este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABD .

19. Fie un cerc de centru O și rază R și un punct A fix pe acest cerc și M un punct mobil pe cerc. Dacă P este simetricul lui A față de M , să se afle locul geometric al punctului P .

20. În triunghiul ABC ducem bisectoarea interioară AD . Luăm pe laturile AB și AC , în același sens, punctele E și F , astfel încât $AE = DC$ și $AF = BD$. Să se demonstreze că punctele B, C, F, E sunt conciclice.

21. Fie un cerc de centru O și o coardă în acest cerc, mobilă și de lungime constantă. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente în același timp la coarda dată și la cercul de centru O .

22. Fie $ABCD$ patrulater convex înscris în cercul (C) de centru O , iar E proiecția lui O pe AB . Să se arate că $OE = \frac{CD}{2}$ dacă și numai dacă $AC \perp BD$.

23. Pe laturile unui patrulater convex $ABCD$, ca diametru, se construiesc cercuri. Să se demonstreze că cercurile de diametre AB și BC au coarda comună paralelă cu coarda comună a cercurilor de diametre AD și CD .

24. Fie O centrul cercului C circumscris triunghiului oarecare ABC . Tangenta în B la cercul C intersectează dreapta AC în D . Cercul circumscris triunghiului BCD intersectează a doua oară dreapta AB în E . Să se arate că:

- a) dreapta DE este tangentă cercului circumscris triunghiului ACE ;
- b) dreptele AO și DE sunt perpendiculare.

25. Din punctul T se duc tangentele TA și TB la un cerc de centru O . Pe TA și TB ca diametre și în exteriorul unghiului ATB se construiesc semicercurile C_1 și C_2 . Un cerc cu centrul în T , taie semicercurile C_1 și C_2 în P și respectiv Q . Să se arate că $APQB$ este trapez isoscel.

26. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și A' , B' , C' și D' punctele în care bisectoarele unghiurilor sale interioare intersectează cercul circumscris patrulaterului. Să se demonstreze că patrulaterul $A'B'C'D'$ este un dreptunghi.

27. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior trei triunghiuri echilaterale $A'BC$, $B'AC$, $C'AB$. Demonstrați că:

- a) $BB' = CC' = AA'$;
- b) cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale au un punct comun.

28. Fie un romb $ABCD$. Să se arate că:

- a) mijloacele laturilor sale sunt puncte conciclice;
- b) picioarele perpendicularelor duse din centrul rombului pe laturile sale sunt puncte conciclice.

29. Într-un cerc este înscris un patrulater $ABCD$. Știind că $AB = BC = 1$, diagonalele AC și BD sunt perpendiculare, AC este număr întreg, se cere perimetrul patrulaterului $ABCD$.

30. Fie P un punct exterior unui cerc de centru O , iar PA și PB tangentele duse din acel punct la cerc. Perpendiculara în P pe PA intersectează OB în M .

- a) Să se arate că $PM = OM$.
- b) Dacă $OA = 6$, $PA = 8$, să se calculeze lungimea coardei AB .

31. Fie cercurile (O_1, r) , (O_2, R) tangente exterioare în punctul M . Tangenta comună dusă în punctul M la ambele cercuri intersectează tangenta comună T_1T_2 în punctul N . Să se demonstreze că $r < MN < R$.

32. Bisectoarea unghiului cu vârful în A al triunghiului ABC taie cercul circumscris acestuia în D . Să se arate că dacă laturile AC și AB au lungimile b , respectiv c , atunci distanța d dintre punctele A și D verifică inegalitatea:

$$d > \frac{1}{2}(b + c).$$

33. Fie D un punct pe arcul $\widehat{BC}$ al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC . Să se demonstreze că:

$$DA = DB + DC.$$

34. Se dă un cerc și un diametru al său AB . (Nu cunoaștem centrul cercului.) Se cere să se construiască cu rigla o perpendiculară pe AB dintr-un punct P nesituat pe AB sau pe cerc.

35. În M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și E, F, G proiecțiile lui M pe BC, CA , respectiv AB . Să se arate că punctele E, F și G sunt coliniare (dreapta lui Simson).

36. În cercul de centru O se consideră un diametru AB . Fie C intersecția perpendicula-rei în O pe AB cu unul din semicercurile determinate pe AB , iar M un punct pe arc-ul AC . MB intersectează AC în R și CO în P . Determinați unghiurile triunghiului AMB dacă triunghiul CPR este isoscel.

37. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul (O) . În A, B, C și D se duc tangente la cercul (O) , care formează patrulaterul $MNPQ$. Să se găsească condiția necesară și sufi-cientă pentru ca patrulaterul $MNPQ$ să fie înscritibil.

38. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) în care înălțimea BB' intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul B'' . Să se arate că perpendiculara dusă din punctul C pe dreapta AB'' este tangentă la cercul circumscris triunghiului.

39. Fie O intersecția diagonalelor patrulaterului $ABCD$, iar O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cer-curilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COD și DOA . Să se demonstreze că $O_1O_2O_3O_4$ este paralelogram.

40. Pe un cerc se aleg punctele A, B și P . Din mijlocul M al arcului APB e coborâtă perpendiculara MK pe cea mai mare dintre coardele AP și BP . Să se demonstreze că punctul K înjumătățește linia frântă APB (Arhimede).

3. Relații metrice

Arii

1. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, AA' înălțime și H ortocentrul său. Să se demonstreze relația:

$$HA' \cdot AA' = A'B \cdot A'C.$$

Ce devine relația dacă triunghiul este dreptunghic în A ?

2. Fie $ABCD$ și $DEFG$ două pătrate situate în același plan, astfel încât $G \in CD$ ($DG < CD$) și E aparțin semidreptei AD . Să se calculeze mărimea raportului $\frac{BF}{AG}$.

3. Fie $ABCD$ un pătrat de latură a și M , respectiv N mijloacele laturilor BC și CD . Dreptele AM și BN se intersectează în P . Să se arate că:

a) $AM \perp BN$;

b) $DP = a$.

4. În triunghiul dreptunghic ABC notăm cu M și N proiecțiile piciorului D al înălțimii unghiului drept A pe CA și AB . Să se stabilească relația:

$$\frac{CM}{MA} = \frac{AN}{NB} = \left(\frac{CA}{AB} \right)^2.$$

5. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și piciorul perpendicularei din A pe BC . Să se arate că:

$$AD + BC > AB + AC.$$

6. Un triunghi dreptunghic are perimetrul de 30 cm și înălțimea dusă din vârful unghiului drept pe ipotenuză de 6 cm. Să se afle laturile triunghiului dreptunghic.

7. Să se afle laturile unui triunghi dreptunghic care are suma catetelor mai mare cu 4 cm decât ipotenuza și perimetrul de 24 cm.

8. În dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = a$, $BC = b$, $a > b$, fie M mijlocul lui AB iar N mijlocul lui BC .

a) Să se afle relația între a și b , astfel ca triunghiul NMD să fie dreptunghic.

b) Să se arate că triunghiul NMD nu poate fi isoscel.

9. În triunghiul ABC se duce înălțimea AD ; dacă $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, $\frac{BD}{DC} = \frac{9}{16}$, să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

10. Fie ABC un triunghi cu $m(\angle B) = 60^\circ$ și $BC = 2AB$. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.

11. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și D , respectiv E simetricele punctelor A și B față de dreptele BC și AC . Să se arate că punctele D , C , E sunt coliniare dacă și numai dacă $m(\sphericalangle C) = 60^\circ$.

12. Fie $ABCD$ un trapez isoscel de baze a , b și l lungimea laturilor neparalele. Să se afle diagonala trapezului.

13. Fie G centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$). Să se demonstreze că avem: $AB^2 = 2AG^2 + BG^2$.

14. Să se determine triunghiurile dreptunghice ale căror laturi sunt exprimate prin numere întregi.

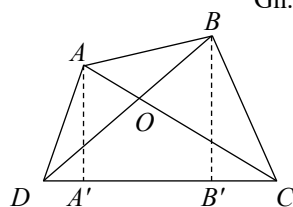
15. Dacă laturile a , b , c ale unui triunghi dreptunghic sunt exprimate prin numere întregi, atunci $a^3 + b^3 + c^3$ este divizibilă prin $a + b + c$.

Gh. Lustig

16. Fie $ABCD$ un patrulater convex și O punctul de intersecție a diagonalelor. Să se arate că:

$$\text{aria}(AOD) = \text{aria}(BOC)$$

dacă și numai dacă AB și DC sunt paralele.



17. Se dă un triunghi echilateral ABC și D un punct în interiorul său. Fie M , P , Q proiecțiile acestui punct pe laturi. Să se demonstreze că suma $DM + DP + DQ$ este constantă.

18. Fie AM și BN medianele unui triunghi oarecare ABC și P mijlocul laturii AB . Notăm $MP \cap BN = \{R\}$, $NP \cap AM = \{S\}$, $AM \cap BN = \{Q\}$. Să se demonstreze că:

$$S_{NQS} = S_{MQR}.$$

19. Se dau două segmente egale AB și CD . Care este locul geometric al punctelor M pentru care $S_{MAB} = S_{MCD}$?

20. Să se demonstreze că aria unui triunghi înscris într-un trapez este mai mică sau egală cu $\frac{a \cdot h}{2}$, unde a este baza mare a trapezului, iar h lungimea înălțimii trapezului.

21. Un romb și un paralelogram au unghiul ascuțit de 60° . Laturile paralelogramului sunt respectiv egale cu diagonalele rombului. Care este raportul ariilor?

22. În patrulaterul convex $ABCD$, de arie S , fie O intersecția diagonalelor AC și BD . Dacă $AC \cdot BD = 25$, atunci triunghiurile OAB , OBC , OCD și ODA au același ortocentru.

23. În triunghiul ABC , punctul M este mobil pe latura AB . Paralela prin B la MC taie latura AC în N . Să se arate că $\text{aria}(AMN) = \text{constantă}$.

24. Să se arate că diagonalele unui paralelogram împart aria acestuia în patru triunghiuri de arii egale. Reciproca este adevărată?

25. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD și DA . Notăm cu R intersecția dreptelor MP și NQ . Să se arate că:

$$\text{aria}(AMRQ) + \text{aria}(RNCP) = \frac{1}{2} \text{aria}(ABCD).$$

26. Fie ABC un triunghi de laturi a, b, c care verifică relațiile:

$$c^2 = ab, (b+c)(b-c) = b \text{ și } (a+b-c\sqrt{2})(a+b+c\sqrt{2}) = 25.$$

Să se afle perimetrul și aria triunghiului ABC .

27. Laturile triunghiului ABC satisfac relațiile:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3} \text{ și } ab + bc + ca = 4\sqrt{3}.$$

Să se arate că aria triunghiului ABC este egală cu 1.

28. Să se arate că aria unui triunghi dreptunghic este dată de formula: $S = r(a + r)$, unde a este ipotenuza, iar r raza cercului înscris.

29. Pe latura BC a triunghiului oarecare ABC luăm un punct D . Fie E și F proiecțiile lui D pe înălțimile triunghiului duse din B și C . Să se arate că:

$$AB \cdot CF + AC \cdot BE = 2S,$$

unde S este aria triunghiului ABC .

30. Se dau două segmente de lungimi a și b . Să se construiască segmentul de lungime $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

31. Să se arate că triunghiurile având măsura laturilor numere pare consecutive, care au aria numeric egală cu perimetrul, sunt dreptunghice.

32. Să se determine poligoanele convexe al căror număr de diagonale este prim.

33. Se consideră un poligon regulat cu n laturi și M un punct în interiorul său și să notăm cu $d_1, d_2, \dots, d_n$ distanțele lui M la laturi.

a) Să se arate că apotema poligonului este media aritmetică a acestor distanțe.

b) Să se exprime suma acestor distanțe în cazul poligoanelor cu 3 și cu 6 laturi.

34. Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c și r_a, r_b, r_c lungimile razelor cercurilor exînscrise. Să se arate că triunghiul dat este dreptunghic dacă și numai dacă:

$$r_b + r_c = a.$$

4. Probleme recapitulative și pentru cercurile de elevi

1. Fie H ortocentrul triunghiului ABC și H_a, H_b, H_c simetricele, lui H față de BC, CA, AB . Să se arate că H_a, H_b, H_c aparțin cercului circumscris triunghiului ABC .

2. Fie M simetricul ortocentrului H al triunghiului ABC , față de mijlocul D al laturii BC . Să se arate că M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC .

3. Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce $MP \parallel AB$ și fie $\{P\} = MP \cap BC$, apoi $MQ \parallel CD$ și $\{Q\} = MQ \cap AD$. Să se demonstreze relația:

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1.$$

4. Se dă unghiul $\angle xOy$ și un punct exterior P în planul acestuia. Să se ducă prin P o dreaptă care să taie laturile unghiului dat în A și B , astfel ca perimetrul triunghiului AOB să aibă o lungime dată.

5. Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi, să se arate că are loc inegalitatea:

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

6. Se dă un cerc, un diametru al său AB și un punct P nesituat pe cerc sau pe diametru. Să se construiască cu rigla o perpendiculară pe AB din P .

7. Să se arate că triunghiurile ale căror laturi a, b, c verifică relația:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4ka - 6kb - 8kc + 29k^2 = 0 \quad (k > 0)$$

sunt asemenea.

8. Să se arate că dacă între laturile a, b, c ale unui triunghi există relația:

$$a^2 + 5b^2 + 2c^2 + 2ac - 4ab - 6bc = 0,$$

atunci triunghiul este echilateral.

9. Cercurile (O_1) și (O_2) se intersectează în A și B . O secantă variabilă intersectează din nou cercurile în M și N . Să se găsească poziția pentru care secanta MN este maximă.

10. Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil (în care poate fi înscris un cerc). Să se demonstreze că $AB + CD = AD + BC$. Reciproca este adevărată?

11. Pe înălțimea AA' a unui triunghi ABC se ia un punct M care se proiectează pe laturile AC și AB în N și P .

a) Să se arate că $m(\angle BMC) = m(\angle PAN) + m(\angle A)$.

b) Să se determine poziția lui M , astfel încât $m(\angle BMC) = 2m(\angle A)$.

12. Trei cercuri egale de rază $R = 1$ sunt tangente două câte două în punctele A, B, C . Să se afle aria triunghiului curbiliniu ABC .

13. Să se arate că lungimea tangentei comune la două cercuri tangente exterioare este medie proporțională între diametrele celor două cercuri.

14. Două cercuri concentrice au razele R și r . La ce distanță de centrul lor trebuie dusă o secantă, astfel încât cele trei segmente determinate de cercuri pe ea să fie egale? Ce condiții trebuie să îndeplinească razele ca problema să fie posibilă?

15. Fie ABC un triunghi și BA_1C , CB_1A , AC_1B triunghiurile echilaterale construite în exterior pe laturile BC , CA , AB . Să se arate că:

a) $[AA_1] \equiv [BB_1] \equiv [CC_1]$;

b) AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente într-un punct T care are proprietatea că din el, laturile triunghiului ABC se văd sub același unghi (120°), numit și punctul izogon al triunghiului sau punctul lui Toricelli).

16. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $BD \perp AC$ ($D \in AC$). Să se arate că are loc relația:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot DC.$$

17. Fie o dreaptă (Δ) și $M, N, P \in (\Delta)$, N între M și P , iar $A \notin (\Delta)$. Să se arate că are loc relația:

$$AM^2 \cdot NP - AN^2 \cdot MP + AP^2 \cdot MN = MN \cdot NP \cdot MP \text{ (relația lui Stewart)}.$$

18. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se arate că $ABCD$ este dreptunghi dacă și numai dacă pentru orice punct M din plan are loc relația:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

19. Dacă o dreaptă (Δ) taie laturile AB , AC și prelungirea lui BC în P , N și M , atunci are loc relația:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus)}.$$

20. Fie AA' , BB' , CC' ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$) trei drepte concurente în interiorul triunghiului ABC . Să se arate că are loc relația:

$$(1) \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1 \text{ (teorema lui Ceva)}$$

Reciproc, dacă are loc relația (1), cu $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$, atunci dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente.

21. Fie I punctul de concurență al dreptelor AA' , BB' , CC' din triunghiul ABC . Atunci are loc relația:

$$(1) \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C} = \frac{AI}{IA'} \text{ (relația lui Van Aubel)}.$$

22. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC . Notăm $D = AM \cap BC$, $E = BM \cap AC$, $F = CM \cap AB$. Să se arate că:

$$\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF} \geq 8.$$

23. Fie ABC un triunghi, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor, A', B', C' mijloacele laturilor, BC, CA, AB , A_0, B_0, C_0 mijloacele segmentelor AH, BH, CH (H – ortocentrul triunghiului ABC).

a) Să se arate că punctele $A_1, B_1, C_1, A', B', C', A_0, B_0, C_0$ sunt conciclice (cercul lui **Euler**).

b) Să se determine centrul și raza cercului lui Euler.

c) Să se arate că $OA' = \frac{AH}{2}$.

d) Să se arate că punctele H, ω – centrul cercului lui Euler, O – centrul cercului circumscris și G – centrul de greutate al triunghiului sunt patru puncte coliniare (dreapta lui Euler).

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Fie două plane perpendiculare p și q , iar A și B două puncte pe intersecția celor două plane. Fie $C \in p$ și $D \in q$, astfel încât $m(\angle ABC) = 90^\circ$, $m(\angle ADB) = 90^\circ$. Să se arate că triunghiurile CBD și ADC sunt dreptunghice.

2. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare și A', B', C' centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OCA și OAB .

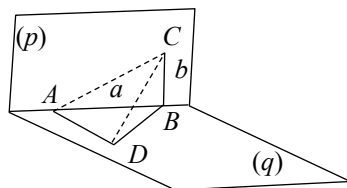
a) Să se arate că planele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ sunt paralele.

b) Să se afle raportul dintre aria ABC și aria $A'B'C'$.

3. Într-un plan π se consideră un paralelogram $ABCD$ și un punct $S \notin \pi$. Să se determine dreapta de intersecție dintre planele (SAB) și (SCD) . Să se arate că intersecția planelor (SAB) și (SCD) împreună cu intersecția planelor (SAD) și (SBC) determină un plan paralel cu planul π .

4. Fie două plane perpendiculare p și q , iar A și B două puncte situate pe dreapta lor de intersecție. Fie $C \in p$ și $D \in q$, astfel încât $m(\angle ABC) = m(\angle ADB) = 90^\circ$.

Știind că $AB = a$, $BC = b$, să se calculeze volumul sferei determinate de punctele A, B, C și D .



5. Distanța AB de la punctul A la planul p este a . Din punctul A ducem oblicele AC, AD care fac cu planul p unghiuri de 45° și 30° , iar între ele un unghi drept ($C, D \in p$). Să se afle distanța de la C la D și aria laterală a piramidei $ABCD$.

6. Fie planul π și dreptele d_1, d_2 concurente, perpendiculare, neconținute în planul π , astfel încât: $d_1 \cap \pi = A, d_2 \cap \pi = B, AB = a, \angle(d_1, \pi) = 30^\circ, \angle(d_2, \pi) = 45^\circ, d_1 \cap d_2 = M$. Să se afle aria proiecției ortogonale a triunghiului dreptunghic AMB pe planul π și mărimea unghiului diedru format de planul AMB și planul π .

7. În vârful A al unui triunghi oarecare ABC se duce perpendiculara AD pe planul său, apoi înălțimea CE a triunghiului ABC și perpendiculara din E pe BD în F . Să se arate că BD este perpendiculară pe planul CEF .

8. Fie $ABCD$ un paralelogram și O un punct exterior planului său. Notăm cu M, N, P și Q proiecțiile lui O pe dreptele AB, BC, CD și DA , iar cu S punctul de intersecție a dreptelor MP și NQ . Să se arate că dreapta OS este perpendiculară pe planul $ABCD$.

9. O dreaptă taie două plane perpendiculare π_1 și π_2 în A și B ; fie A', B' proiecțiile lui A și B pe dreapta de intersecție a planelor. Să se arate că:

$$AB^2 = AA'^2 + A'B'^2 + B'B^2$$

și

$$\sin^2(\pi_1, AB) + \sin^2(\pi_2, AB) = \sin^2(A'B', AB).$$

10. Fie $VABC$ un tetraedru cu proprietatea că fețele VAB și ABC au aceeași arie. Să se arate că suma distanțelor unui punct oarecare de pe segmentul CV la fețele VAB și ABC este constantă.

11. Pe muchiile AB, BC, CD și DA ale tetraedrului regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P și Q , astfel încât: $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP] \equiv [DQ]$. Dacă O este mijlocul segmentului NQ , să se arate că planul MOP este perpendicular pe dreapta NQ .

12. Într-un cub cu muchia de lungime a , $ABCD$ și $A'B'C'D'$ sunt două fețe opuse. Dacă M este mijlocul muchiei $A'B'$, să se calculeze distanța de la vârful C' la dreapta BM .

13. Un paralelipiped dreptunghic are laturile bazei de 3, respectiv 4 m, iar înălțimea $5\sqrt{3}$ m. Să se afle diagonalele paralelipipedului și unghiurile pe care acestea le fac cu planele bazelor.

14. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se demonstreze că numerele:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, y = \sqrt{b^2 + c^2}, z = \sqrt{a^2 + c^2}$$

pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că acest triunghi este ascuțitunghic și să se calculeze aria lui.

15. Muchiile unui paralelipiped dreptunghic sunt proporționale cu numerele a, b, c , iar diagonala are lungimea d . Să se calculeze suma muchiilor.

16. Să se determine paralelipipedul dreptunghic de arie totală maximă, atunci când diagonala sa are o lungime constantă.

17. Fie M un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC . În M se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului pe care se ia un punct N . Să se arate că proiecțiile punctului N pe laturile triunghiului ABC sunt coliniare.

18. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AB = AC$. Notăm cu M și N punctele de intersecție a bisectoarelor unghiurilor BAD și DAC cu muchiile BD și DC . Să se arate că dreapta MN este paralelă cu planul ABC .

19. Dacă în tetraedrul $ABCD$, $AD \perp BC$ și $m(\angle ADB) = m(\angle ADC)$, atunci $AB = AC$.

20. Fie tetraedrul $VABC$, în care două din cele trei unghiuri cu vârful în V sunt drepte. Să se demonstreze că al treilea unghi cu vârful în V este drept dacă și numai dacă este îndeplinită relația:

$$S_{ABC}^2 = S_{VAC}^2 + S_{VBC}^2 + S_{VAB}^2 .$$

21. Fie tetraedrul $VABC$ cu muchiile concurente în vârful V , perpendiculare două câte două. Notând $A_{CVA} = A_1$, $A_{CVB} = A_2$, $A_{AVB} = A_3$, să se arate că:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{A_1 A_2 A_3} .$$

22. Să se demonstreze că într-un tetraedru tridreptunghic $VABC$ ($VA \perp VB \perp VC \perp VA$) suma distanțelor lui V la dreptele AB , BC , CA este mai mică sau egală cu semiperimetrul triunghiului ABC . În ce caz avem egalitate?

23. Să se arate că în orice tetraedru cele 6 plane determinate de câte o muchie și mijlocul muchiei opuse au un punct comun.

24. Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietățile: $AB = AC = BC = AD = BD$ și $AD \perp BC$. Să se demonstreze că $ABCD$ este un tetraedru regulat.

25. Să se demonstreze că dacă M , N , P sunt centrele de greutate a trei fețe ale tetraedrului $ABCD$, iar Q un punct oarecare din planul celei de-a patra fețe, atunci raportul dintre volumele tetraedrelor $ABCD$ și $MNPQ$ este $\frac{1}{27}$.

26. Un tetraedru regulat $VABC$ are muchia egală cu a . Fie M , N , P , Q pe muchiile AB , BC , VA și respectiv CV , astfel încât $AM = BN = CQ = \frac{a}{3}$ și $AP = \frac{a}{9}$. Să se arate că punctele M , N , P , Q sunt coplanare.

27. Fie $ABCD$ un tetraedru și $M \in AB$. Prin M se duce un plan paralel cu AC și BD care taie pe BC în Q , pe CD în P și pe AD în N .

a) Să se specifice natura patrulaterului $MNPQ$ și să se afle perimetrul lui în funcție de a , unde $AM = a$, $AB = 5$, $AC = 12$, $BD = 7$.

b) Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat și M mijlocul lui AB , să se arate că $MNPQ$ este pătrat.

28. Să se demonstreze că dacă fețele unui tetraedru sunt izoperimetrice, atunci ele sunt congruente.

29. O foaie de tablă având forma unui triunghi dreptunghic se îndoaie după înălțimea AD corespunzătoare ipotenuzei BC , astfel ca BD să devină perpendicular pe DC . Notând noua poziție a vârfului B cu B' , să se arate că:

- a) volumul cubului cu latura AD este de 6 ori volumul piramidei $AB'CD$, notat cu $V_{AB'CD}$;
- b) $B'C = \frac{1}{a} \sqrt{b^4 + c^4}$;
- c) $V_{ABB'C} = \frac{c^3}{6} \sin B$;
- d) $\frac{V_{AB'CD}}{V_{ABCD}} = \sin^2 B$.

30. Fie A, B, C punctele de intersecție a unui plan P cu muchiile triedrului tridreptunghic de vârf O . Să se demonstreze că:

- a) punctul O se proiectează pe planul P în ortocentrul H al triunghiului ABC ;
- b) segmentele OH, OA, OB, OC verifică relația:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2};$$

c) dacă α, β, γ sunt unghiurile pe care le face OH cu planele OBC, OCA, OAB , atunci avem:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

31. În patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul de centru O și rază R se cunosc: arcele $\widehat{AB}$ și $\widehat{BC}$ sunt invers proporționale cu numerele 1,(3) și 0,(6); punctele A și C diametral opuse, iar arccd $\widehat{CB} = \widehat{AD}$. În punctul A se ridică perpendiculara pe planul patrulaterului pe care se ia segmentul $AV = R\sqrt{2}$. Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei $VABCD$.

32. Fie $ABCD$ un romb ale cărui diagonale îndeplinesc relația: $AC^2 = 3BD^2$. În vârful A se ridică o perpendiculară pe planul rombului pe care se ia punctul M , astfel încât $AM = a$. Știind că distanța de la M la BC este b , să se afle:

- a) distanța de la M la vârfurile rombului;
- b) distanța de la M la diagonala BD .

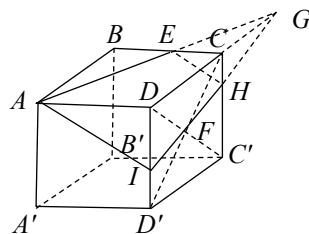
33. Pe planul rombului $ABCD$ de latură a și diagonală $BD = a\sqrt{3}$ se ridică perpendiculara $AS = a$. Fie P și Q mijloacele muchiilor SA și SC . Să se afle:

- a) distanța de la A la latura BC ;
- b) distanța de la A la planul (SBD) ;
- c) unghiul diedru format de planele (BPQ) și (ABC) .

34. Într-un cub $ABCDEFGH$, P este mijlocul laturii AB și Q punctul de intersecție dintre BG și CF .

- a) Să se demonstreze că AG este paralelă cu planul CFP .
- b) Să se demonstreze că HQ este perpendiculară pe planul CFP .

35. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub. Se secționează cubul prin planul determinat de punctul A , mijlocul muchiei BC și centrul feței $DCC'D'$. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri rezultate prin secționarea cubului.



36. În cubul $ABCD A'B'C'D'$, de latură a , se notează cu M și N mijloacele muchiilor AB , respectiv AD , iar cu E și F mijloacele muchiilor $B'C'$ și $D'C'$.

- Să se arate că planele $A'MN$ și CEF sunt paralele.
- Să se calculeze distanța dintre planele $A'MN$ și CEF .

37. Se dă o piramidă patrulateră regulată $VABCD$. Să se arate că mijloacele segmentelor VB , VD , AB și AD sunt vârfurile unui dreptunghi. Când este pătrat acest dreptunghi?

38. O piramidă are vârful V și baza un triunghi echilateral ABC , cu latura a . Muchia laterală VA este perpendiculară pe planul bazei, iar fața laterală VBC face cu baza un unghi de 60° . Să se afle volumul și aria totală a piramidei.

39. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată și M un punct al muchiei AB , astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{7}{2}$. Prin M se duce un plan paralel cu fața VBC , care taie înălțimea piramidei într-un punct Q . În ce raport împarte Q înălțimea piramidei?

40. Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă oblică cu baza un pătrat și cu muchiile laterale de două ori mai mari decât latura bazei. Știind că diagonala $A'C$ este perpendiculară pe planul bazei, iar aria laterală este egală cu volumul, se cere:

- latura pătratului;
- aria laterală și totală.

41. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 3, 4, 5 și lungimea diagonalei egală cu 10. Să se afle dimensiunile paralelipipedului.

42. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$ de latură a și M un punct arbitrar pe sfera circumscrisă cubului. Să se calculeze ΣMA^2 .

43. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 11, iar aria lui este de 72 cm^2 . Să se afle lungimea diagonalei sale.

44. Se dă un con circular drept cu raza bazei $R = a$ în care se înscrie un cilindru circular drept. Știind că raportul dintre înălțimea cilindrului și cea a conului este $\frac{1}{\sqrt{3}}$, iar

conul desfășurat este un semicerc, să se afle:

- volumul conului;
- volumul cilindrului.

45. Două conuri circulare drepte au aceeași arie laterală, însă generatoarele lor fac cu planul bazei unghiuri de 45° și 30° . Să se arate că raportul înălțimilor lor este de $\sqrt[4]{6}$, iar raportul razelor este $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. Care este raportul generatoarelor?

46. Să se demonstreze că volumul unui con circular drept este mai mare sau egal cu dublul volumului sferei înscrise.

47. Se notează cu a , b aria totală și volumul unui con circular drept și cu c aria sferei înscrise în con. Să se demonstreze egalitatea:

$$a^2c = 36\pi b^2.$$

48. Să se arate că volumul trunchiului de con circumscris unei sfere este strict mai mare decât $\frac{3}{2}$ din volumul sferei.

49. Să se afle volumul și aria laterală a conului circular drept înscris într-o sferă de rază R , știind că înălțimea sa este media aritmetică dintre raza bazei și generatoare.

50. Într-un con circular drept este înscrisă o sferă. Știind că raportul dintre volumul conului și volumul sferei este $m > 1$, să se găsească raportul dintre aria totală a conului și aria sferei, în funcție de m .

51. Să se demonstreze că orice punct de pe suprafața unei sfere formează cu punctele de intersecție dintre două cercuri mari ale sferei un triunghi dreptunghic.

52. Fie patrulaterale inscriptibile $ABCD$ și $ABEF$ necoplanare. Atunci există o sferă ce trece prin cele 6 puncte.

ALGEBRĂ

1. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

Descompuneri în factori

Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

A. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

1. $(3a + 2b - c) + (a - b + c) + (-4a - b).$

2. $(3x^2 + 4xy - 3y^2) + (-4x^2 + 7xy + y^2) + (x^2 - 11xy + 2y^2).$

3. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} - \frac{3c}{4}\right) + \left(-\frac{2a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{c}{3}\right) + \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{6} + \frac{c}{2}\right).$

4. $(2x^3 - 5x^2 + 6x + 1) + (-x^3 + 7x^2 - 8x + 1) + (4x^3 - 5x^2 + 3x + 2).$

5. $\left(\frac{1}{2}x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 7x^2 + 2x - 3\right) - \left(-\frac{5x^5}{2} + \frac{7x^4}{3} + \frac{4x^3}{5} + x^2 - x + 2\right) +$
 $+ \left(-x^5 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{5} - 3x^2 + 2x + 6\right).$

6. $x + 1 - (-2x + 3) - [1 - (2x - 4)] + 7x - 2.$

7. $a + b - c + (2a - b + c) - (a - b + 2c) - (-a + 3b - c).$

8. $x - [(-x + 2y - 3z) + (-x + 3y - z)] + (-5x + 2y + 7z).$

9. $1 - \{x + y - z - [2x + 3y - z - (-x + y - 3z)] - 1 + x\}.$

10. Dacă $A = x + y - z$; $B = x - y + z$; $C = -x + y + z$, să se calculeze:

$$E_1 = A + B - C; E_2 = A - B + C; E_3 = -A + B + C.$$

11. Dacă $A = 2a + 3b - 4c$; $B = 3a - 4b + 2c$; $C = -4a + 2b + 3c$, să se calculeze:

$$E_1 = 2A + 3B - 4C; E_2 = 3A - 4B + 2C; E_3 = -4A + 2B + 3C.$$

12. Să se calculeze suma:

$$S = x + y + z + \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{z}{3}\right) + \left(\frac{y}{4} - \frac{z}{2} - \frac{x}{3}\right) + \left(\frac{z}{4} - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right).$$

13. Să se efectueze:

- | | |
|---|---|
| 1) $(a + 2b)(2a + b)$; | 2) $(2a - 1)(3a + 1)$; |
| 3) $(5x + y)(4x - 3y)$; | 4) $(3x^2 + x + 1)(x - 1)$; |
| 5) $(x^2 + 7x - 1)(x + 1)$; | 6) $(x^2 + 7x - 1)(x + 1)$; |
| 7) $(x^5 - 4x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2)(x - 1)$; | 8) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; |
| 9) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$; | 10) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$; |
| 11) $(2x - 1)(3x + 2)(2x + 3)$; | 12) $(x + a)(x + b)(x + c)$; |
| 13) $(x - a)(x - b)(x - c)$; | 14) $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$; |
| 15) $(x + y)(y + z)(z - x)$; | 16) $(x - y)(y - z)(z - x)$; |
| 17) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; | 18) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$; |
| 19) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$; | 20) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$; |
| 21) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$; | 22) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$; |
| 23) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 1)$; | 24) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; |
| 25) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; | 26) $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$; |
| 27) $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$; | 28) $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$; |
| 29) $(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$; | |
| 30) $(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)$; | |
| 31) $(a - b)^2$; | 32) $(a + 2b)^2$; |
| 33) $(2a + 3b)^2$; | |
| 34) $(3a - 2b)^2$; | 35) $(x - 2y)^2$; |
| 36) $(2x + 1)^2$; | |
| 37) $(3x + 2y)^2$; | 38) $(3x - 5y)^2$; |
| 39) $(x^2 - 3y)^3$; | |
| 40) $(2x^2 + 3y^3)^3$; | 41) $(a + b - 2c)^2$; |
| 42) $(2a + b + c)^2$; | |
| 43) $(-a + b - c)^2$; | 44) $(x + y - 3z)^2$; |
| 45) $(x^2 - x + 1)^2$; | |
| 46) $(x^2 + xy + y^2)^2$; | 47) $(x + y)^2(x^2 - xy + y^2)$; |
| 48) $(x + 2y)^2(2x + 3y)$; | |
| 49) $(x - 3y)^2(2x - y)^3$; | 50) $(x - y)^2(x + y)$. |

B. Descompuneri în factori

- | | |
|--|--|
| 1. $7x + 14y - 21z$; | 2. $3x + 3x^2 - 6xy$; |
| 3. $10a^3bc - 15a^2b^2c + 10a^2bc^2$; | 4. $-2a^2 - 2ab + 2a^2c$; |
| 5. $10y^3 - 10y^2 + 10y$; | 6. $a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 - 6ab^3 + b^4$; |
| 7. $a^3 + 4a^2b + 2ab^2 - b^3$; | 8. $2x^2 + xy - 3y^2$; |
| 9. $6x^2 - 5xy - 6y^2$; | 10. $ax + bx + x - a - b - 1$; |
| 11. $2ax + 4bx - 2cx + ay + 2by - cy$; | 12. $18x^3 + 3x^2 - 6x$; |
| 13. $abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1$; | 14. $abc - x(ab + bc + ca) + x^2(a + b + c) - x^3$; |
| 15. $xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$; | 16. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; |
| 17. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; | 18. $x^3 - 2x^2 + 2x + 1$; |

19. $2a^2 + ab + 5a - b^2 + 2b + 3$; 20. $6x^2 + 13xy + 13x + 6y^2 + 7y - 5$;
 21. $a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab - 4ac - 4bc$; 22. $a^2 + b^2 + 9c^2 - 2ab - 6ac + 6bc$;
 23. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$; 24. $4x^2 - 4x + 1$;
 25. $9x^2 + 6xy + y^2$; 26. $4x^2 - 12xy + 9y^2$;
 27. $x^4 + 4x^2y^3 + 4y^6$; 28. $x^2y^2 - 2xy + 1$;
 29. $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; 30. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$;
 31. $125x^3 + 75x^2y + 15xy^2 + y^3$; 32. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$;
 33. $x^3 + 8y^3$; 34. $27x^3 - y^6$;
 35. $\frac{1}{8}x^6 - y^9$; 36. $x^{12} - 2x^6y^3 + y^6$;
 37. $x^4 - 1$; 38. $x^4 + 1$;
 39. $x^4 - y^8$; 40. $x^4 + y^8$;
 41. $x^{12} - 1$; 42. $x^{12} + 1$;
 43. $x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7$.

44. Să se descompună în factori:

$$E = x(x - a)(x - b) + b(a - b)(x - b) - a(a - b)(x - a) - abx.$$

45. Să se descompună în factori:

$$E_1 = x^4 - 6x^2 + 1, E_2 = x^4 - 8x^2 + 4.$$

46. Să se descompună în factori:

$$E = 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - d)^4 + (d - a)^4] - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2]^2.$$

47. Să se descompună în factori:

$$E(a, b, c) = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc.$$

48. Să se descompună în factori expresia:

$$E = (x + y)(y + z)(x + 2y + z) + (x + y)(x + z)(2x + y + z) + (y + z)(z + x)(x + y + 2z) + 2(x + y)(y + z)(z + x).$$

49. Să se descompună în factori expresia:

$$E = a^4(a^2 + 1) + a^2b^2(1 + b^2) - b^4(a^2 + b^2 - 1).$$

50. Să se arate că:

$$(a + b)(1 - ab) + (a - b)(1 + ab) = 2a(1 - b^2).$$

51. Să se arate că:

$$\begin{aligned}(1 - ab)^2 + (a + b)^2 &= (1 + ab)^2 + (a - b)^2 = (1 + a^2)(1 + b^2); \\ (1 + ab)^2 - (a + b)^2 &= (1 - ab)^2 - (a - b)^2 = (1 - a^2)(1 - b^2); \\ [(1 + ab)^2 - (a - b)^2]^2 + 4(a - b)^2(1 + ab)^2 &= (1 + a^2)^2(1 + b^2)^2.\end{aligned}$$

52. Să se arate că expresia:

$$E = (a^2 + c^2)(b - d) - (c^2 + d^2)(a + b) + (b^2 + c^2)(a + d)$$

se anulează dacă $a + b = 0$, $a + d = 0$ sau $b - d = 0$.

C. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

1. Să se arate că:

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad \frac{ab + (2 - a)(2 - b)}{(2 - a)b + (2 - b)a} &= \frac{1 + (a - 1)(b - 1)}{1 - (1 - a)(1 - b)}; \\ \text{b)} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2} + \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \right) &= \frac{1 + a^4}{1 - a^4} \geq 1, \text{ } a \text{ și } b \text{ numere reale.}\end{aligned}$$

2. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

$$\begin{aligned}1) \quad &\left\{ \frac{1}{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} - \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{1}{\frac{ab + b^2}{a}} + \frac{1}{\frac{a^2 + ab}{b}} \right] \right\} : \frac{b}{a - b}; \\ 2) \quad &\left[\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right] : \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right); \\ 3) \quad &\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{1}{x + y} \left(\frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{y} \right) : \left(1 - \frac{y}{x} \right).\end{aligned}$$

3. Să se aducă la o formă mai simplă:

$$\begin{aligned}1) \quad &\frac{2a}{a^2 - 4x^2} + \frac{1}{2x^2 + 6x - ax - 3a} \cdot \left(x + \frac{3x - 6}{x - 2} \right); \\ 2) \quad &\left(\frac{2a + 10}{3a - 1} + \frac{130 - a}{1 - 3a} + \frac{30}{a} - 3 \right) \cdot \frac{3a^3 + 8a^2 - 3a}{1 - \frac{a^2}{4}}; \\ 3) \quad &\left[\frac{a - 1}{a^2 - 2a + 1} + \frac{2(a - 1)}{a^2 - 4} - \frac{4(a + 1)}{a^2 + a - 2} + \frac{a}{a^2 - 3a + 2} \right] \cdot \frac{36a^3 - 144a - 36a^2 + 144}{a^3 + 27};\end{aligned}$$

$$4) \left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right] : \left[\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right];$$

$$5) \left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x};$$

$$6) \frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n} \cdot \left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a} \right];$$

$$7) \frac{2a^2(b+c)^{2n} - \frac{1}{2}}{an^2 - a^3 - 2a^2 - a} : \frac{2a(b+c)^n - 1}{a^2c - a(nc - ac)}.$$

4. Să se calculeze:

$$E = \left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3} - \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} + 1 \right) : \frac{a+2ab-2b^2+b}{a^3-ab^2-a^2b+b^3}.$$

5. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{4(a^2+4a+2)^2 - (3a^2+5a+4)^2}{6a+a^2-a^3} : \frac{5a^2+13a+8}{a+2}.$$

6. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{x^3+6x^2+7x+42}{x^3+x+222}.$$

Să se arate că $F(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$.

7. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$S = \frac{(a+b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} \text{ pentru } a \neq b \neq c \neq a.$$

8. Să se simplifice fracția:

$$F(x, y) = \frac{x^2(1+y) + y^2(1+x) + 2xy}{x^2(1+y) - y^2(1+x)}.$$

9. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{a^4 + b^4 + (a^2 - b^2)^2 + (a-b)^4} : \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^3 + (a-b)^3} = 1.$$

10. Să se arate că dacă: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, atunci: $\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = 3$.

11. Să se arate că:

$$\frac{x^8 - x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1} = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1.$$

12. Să se arate că:

$$\begin{aligned} \frac{x^{10} - 123x^5 + 1}{x^2 - 3x + 1} &= (x^4 - x^3 + 6x^2 + 4x + 1)(x^4 + 4x^3 + 6x^2 - x + 1) = \\ &= x^8 + 3x^7 + 8x^6 + 21x^5 + 55x^4 + 21x^3 + 8x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

13. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}.$$

14. Să se simplifice fracțiile:

$$\begin{aligned} 1) F_1(x) &= \frac{x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6}{x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 - 2x - 10}; \\ 2) F_2(x) &= \frac{x^4 + 2ax^3 + (a^2 + b)x^2 + 2abx + a^2b}{x^5 + ax^4 - b^2x - b^2a}. \end{aligned}$$

15. Să se simplifice fracția:

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x^2 + 4x^2y - 4xy + 4xy^2 - 4y^2}{x^3 - 2x^2 + 2x^2y - 4xy + x + 2y}.$$

Să se arate că există o valoare a lui $y \in \mathbb{R}$ pentru care fracția este constantă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

16. Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^{2n+1} - 2x^n + xy^2 + 2y - 2x^{n+1}y}{x^{n+2} - 2x - x^2y}.$$

17. Să se simplifice fracția:

$$F(x, y) = \frac{4x^2 + 4xy - 4x + y^2 - 2y + 1}{4x^2 - y^2 + 2y - 1}.$$

18. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{x}{ax - 3a^2} - \frac{3}{x^2 + x - 3ax - 3a} \left(1 + \frac{4x + x^2}{x + 4} \right).$$

19. Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{(n+1)^3 + n^2 + n - 1}{(n-1)^3 - n^2 + n + 1}.$$

20. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{ax^2 + (a^2 + ab + a + b)x + ab + b^2 + b}{bx^2 + (b^2 + ab + b + a)x + ab + a^2 + a}, x \neq -\frac{a}{b}, x \neq -(a + b + 1).$$

Să se arate că pentru $a + b = 0$ și $x \neq 1 \Rightarrow E = -1$.

21. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{2x^{k+1} + x^k + 2x + 1}{x^{k+1} + x^k + x + 1}, k \in \mathbb{N}^*.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Dacă $x \in \mathbb{Z}$, să se demonstreze că fracția simplificată este ireductibilă.

22. Se dă expresia:

$$E = \frac{8a^3 + 4a^2b + 2ab + 4a^2}{12a^3 + 6a^2}.$$

a) Să se simplifice fracția algebrică.

b) Să se precizeze în ce condiții $E > 0$.

23. Fie fracția:

$$f(x) = \frac{ax^2 + x^2 - 2ax - 2x + a + 1}{x - 1}, a \neq -1, x \neq 1.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = a + 1$.

24. Să se simplifice fracțiile:

$$E_1(x) = \frac{(x^2 + 3x + 3)^2 - 1}{(x^2 + 5x + 5)^2 - 1}; E_2(x) = \frac{4x^2 + 28x + 48}{2x^2 + 6x + 8}.$$

25. Se dă expresia:

$$E = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{\frac{x^2 - 1}{x + 1}} \right) \left(\frac{2x^3 + 2x}{4x^3} + 1 \right) \cdot \frac{2x}{2x^2 + 2}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Pentru ce valori ale lui x expresia nu are sens?

c) Pentru ce valori ale lui x expresia este 0?

26. Să se simplifice expresiile:

$$E_1 = \frac{\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)}{\frac{(x+y)^2 - xy}{(x-y)^2 + xy} \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)}; E_2 = \left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} \right) \cdot \frac{x^4 y^4}{xy + y^2} \cdot \frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{x^3 - 2x^2 y + xy^2}.$$

27. Se dă expresia:

$$E(a) = \frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{a^2 + a}{a^3 - 1} \left(\frac{1}{a^2 - a} + \frac{a}{a^2 - 1} \right).$$

a) Să se aducă $E(a)$ la forma cea mai simplă.

b) Dacă $E(a) = \frac{-4a}{(a^2 - 1)^2}$, să se calculeze $E\left(-\frac{3}{2}\right)$.

28. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\frac{a-b}{a} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right] : \left(1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \left(\frac{b^3}{a^2} + \frac{2b^2}{a} + b \right);$$

$$E_2 = \left[\frac{8x^2 - 3x + 5}{2x^2} + \frac{3(x-3)^2}{5x} - \frac{29 + 39x - 5x^2 + 6x^3}{10x^2} \right] : \frac{3x-2}{5x}.$$

1) Să se arate că E_1 este un pătrat perfect.

2) Să se aducă E_2 la formarea mai simplă. Pentru ce valori $x \in \mathbb{R}$, E_2 are sens?

29. Să se simplifice fracția:

$$F(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x - 5}{x^5 + x + 1}.$$

30. Se dă fracția:

$$F(x, y) = \frac{2x^2 - 2x - 3xy - 2y^2 + 9y - 4}{x^2 + 4x - 4xy + 4y^2 - 8y + 3}.$$

Să se simplifice $F(x, y)$ și apoi să se determine valoarea lui y pentru care $F(x, y)$ nu depinde de x .

31. Fie fracția: $F(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2}$.

a) Există valori $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $F(x) \in \mathbb{Z}$?

b) Dar $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) \in \mathbb{Z}$?

32. Se dă fracția:

$$F(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12}{x^3 + 4x^2 + x - 6}.$$

a) Să se simplifice fracția.

b) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $F(x)$ să fie natural.

33. 1) Dacă $a + b + c = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

2) Să se simplifice fracția:

$$F(x) = \frac{(x + 2y + 3z)^3 + (2x + 3y + 4z)^3 - (3x + 5y + 7z)^3}{(x + 2y + 3z)^3 - (2x + 3y + 4z)^3 + (x + y + z)^3}.$$

34. Să se simplifice fracția și să se arate pentru ce valori reale ale lui x există:

$$F(x) = \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^4 + x^3 - x - 1}.$$

35. Fie $a, b > 1$ și expresia:

$$E(a, b) = \frac{\frac{4ab}{(1+a^2)(1+b^2)} - 1 - \frac{2b}{1+b^2} + \frac{2a}{1+a^2}}{\frac{4ab}{(1+a^2)(1+b^2)} - 1 + \frac{2b}{1+b^2} - \frac{2a}{1+a^2}}.$$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Să se rezolve ecuația: $E(a, b) \cdot x = \sqrt{E(a, b)}$.

36. a) Să se simplifice fracția:

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x^2 + 4x^2y - 4xy + 4xy^2 - 4y^2}{x^3 - 2x^2 + 2x^2y - 4xy + x + 2y}.$$

b) Pentru ce valori ale lui x și y , $F(x, y)$ există?

c) Pentru ce valori ale lui x și y , $F(x, y) = 0$?

37. Să se simplifice fracția:

$$F(x) = \frac{2x^4 + x^3 - 4x^2 - 6x - 5}{x^5 + x + 1}.$$

38. Să se simplifice fracția:

$$F = \frac{x^{2n+1} + x^{2n} + x^{n+1} + 2x^n + 1}{x^{2n+1} + x^{2n} - x^{n+1} - 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

39. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

40. Să se demonstreze că dacă avem relația:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

atunci avem și relația:

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0.$$

41. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{(a+1)^4 - 1}{a(a+2)} - (a+1)\sqrt{\frac{(a+1)(a^3+1)}{a^2-a+1}}$$

pentru $a > 0$.

42. Să se aducă la o formă mai simplă:

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}; \\ 2) & \frac{c + \sqrt{c^2 - 4} + 2}{c - \sqrt{c^2 - 4} + 2} + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4} + 2}{c + 2 + \sqrt{c^2 - 4}} - 2c. \end{aligned}$$

43. Să se arate că expresia nu depinde de valoarea lui a :

$$E(a, b) = \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) : \left[\frac{a^2 + ab}{a^2 + 2ab + b^2} - 1 \right] \right\}.$$

44. Să se arate că expresia:

$$E(a, x) = \frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(3x+a)(a+x)} - 2 + 10 \frac{ax - 3x^2}{a^2 - 9x^2}$$

este constantă.

45. Să se arate aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = \left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \right) \cdot \frac{(x-3)^2 + 12x}{2}.$$

46. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a - b}$$

este constantă.

47. Se dă expresia:

$$E(a, b) = 2 \cdot \left[\frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}}{\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}} + \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}} + \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2 - (a-2b)(a+2b)} \right] : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right).$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei aduse la forma cea mai simplă pentru:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \text{ și } b = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}.$$

48. Să se descompună în factori expresia:

$$E = (a+b)(b+c)(a+2b+c) + (b+c)(c+a)(b+2c+a) + (c+a)(a+b)(c+2a+b) + 2(a+b)(b+c)(c+a).$$

49. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{a(1-a)}{(a-b)(c-a)} + \frac{b(1-b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(1-c)}{(b-c)(c-a)} = 1$$

pentru $a \neq b \neq c \neq 1$.

50. Știind că $a+b=1$, să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3).$$

51. Să se demonstreze că pentru $a \neq b \neq c \neq a$, are loc:

$$\frac{(a+b)(a^3+b^3)}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{(a-c)(b-a)} + \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{(b-c)(a-b)} = ab + bc + ca.$$

52. Să se arate că:

$$\frac{a-b}{a+b-c} + \frac{b-c}{b+c-a} + \frac{c-a}{c+a-b} = -\frac{4(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

53. Să se cerceteze dacă $E(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ este divizibil prin $x-1$. Să se afle mulțimea soluțiilor ecuației $E(x) = 0$.

54. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x, y, z) = \frac{2x^2 + 8y^2 + 8xy - 4y^3 - 2xy^2 + 2x + 4y}{x^2z + 4y^2z + 2yz + xz + 4xyz}.$$

Să se arate că dacă $y=0$, E devine o expresie independentă în x . În acest caz, să se afle $z \in \mathbb{Z}$ astfel ca $E \in \mathbb{Z}$.

55. Se consideră fracția:

$$F(n) = \frac{3n^4 + 6n^3 - 2n^2 - 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Să se arate că $(\forall) n \in \mathbb{N}, F(n) \notin \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $S = [F(1)] + [F(2)] + \dots + [F(n)] = n^3$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x .

56. Se dă expresia:

$$E = \frac{x^3 + a^3}{x - a} - \frac{x^3 - a^3}{x + a} - \frac{8a^3 x^3}{x^4 - a^4}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă $E = \frac{P(x)}{Q(x)}$ și să se calculeze valoarea numerică pentru $x = \frac{1}{3}, a = -1$.

b) Să se arate că $P(x) + Q^2(x) - 3a^2x^2$ este un pătrat perfect, cu $P(x)$ și $Q(x)$ prime între ele.

57. Se dă expresia:

$$f(a, b) = \left[\left(\frac{1-b}{1+b} + \frac{1+b}{1-b} - 2 \right) : \frac{4b}{1-b} + a \right] : \frac{1}{b+1}.$$

Să se arate că:

$$1) f(a, b) = a + b + ab;$$

$$2) f(a, b) = f(b, a).$$

58. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$$

știind că: $ax + by + cz = 0$.

D. Polinoame

1. Să se determine un polinom de gradul III care este divizibil cu $x^2 + x - 2$ și care împărțit la $x^2 + 2x - 8$ să dea restul $22x - 12$.

2. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți reali de grad ≥ 2 care îndeplinește simultan următoarele condiții:

$$1) P(x) \text{ împărțit la } x - 1 \text{ dă restul } 3;$$

$$2) (x - 1)P(x) + xP(x + 2) = 1.$$

Să se afle restul împărțirii lui $P(x)$ prin $x^2 - 4x + 3$.

3. Să se determine numărul a , astfel ca polinomul $P(x) = x^{13} - 8x^{10} - ax^3 + 6ax - 4a$ să se dividă prin $x^2 - 3x + 2$.

4. Să se arate că polinoamele:

$$P(x) = (3x + 1)^m + (3x - 1)^{2m} + (x - 3)^{2m+1} \quad (m \in \mathbb{N});$$

$$Q(x) = 2(4x + 5)^n + (4x - 1)^{2n} + (x - 4)^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

admit divizor comun pe $x - 1$.

5. Fără a efectua împărțirea, să se demonstreze că polinomul $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ este divizibil prin $x - 1$ și să se descompună apoi în factori ireductibili. Dacă x este un număr impar, mai mare decât 3, să se arate că $P(x)$ este divizibil prin 16.

6. Să se arate că orice două polinoame din familia de polinoame:

$$F = \{P_k \mid P_k(x) = x^{5k+4} + x^3 + x^2 + x + 1; k \in \mathbb{N}\}$$

au un divizor comun diferit de polinomul unitate.

7. Să se arate că:

a) $P(x) = x^{29} + x^{19} + 1$ este divizibil prin $x^2 + x + 1$;

b) $Q(x) = x^{24} - x^{13} - x^7 + x^6 + 1$ se divide prin $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

8. Fie P și Q două polinoame cu coeficienți reali, astfel încât $P(x + 1) = Q(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că suma coeficienților lui P este egală cu termenul liber al lui Q .

9. Fie polinomul $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Să se arate că $P(x)$ este divizibil prin $Q(x) = cx + d$ dacă și numai dacă $d = 0$ și $bc - ad = 0$.

10. Fie polinomul $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$.

a) Să se determine parametrii m, n, p , astfel ca polinomul $P(x)$ să fie divizibil cu $(x - 1)(x + 1)(x - 3)$.

b) Să se rezolve ecuația: $P(x) = 0$.

11. Fie polinomul $P(x) = (2x - 1)(2x - 2)(2x - 3) \cdot \dots \cdot (2x - 15)$. Să se calculeze $P(5)$.

12. Se dă polinomul $P(x) = x^{20} - 513x^{11} + 127x^4 + 7x + 1$. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $(x - 2)$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca polinomul $P(x) + |a|$ să fie divizibil prin $(x - 2)$.

13. Să se arate că polinomul $P(x) = (x + 2)x^{3n+1} + 2^{3n+2}$ este divizibil prin polinomul $x^2 + 2x + 4$.

14. Să se determine numărul real a , astfel încât polinomul:

$$P(x) = x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + a$$

să fie divizibil cu polinomul $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

15. Să se arate că polinomul $P(x) = 2(x+1)^{n+1} + (-1)^{n+1}x^n$ se divide la $2x+1$. Să se calculeze suma coeficienților cântului.

16. Fie polinomul $P(x) = \alpha^2x^4 - 2\alpha x^3 + \beta^2x^2 - 2\beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, și fie S suma coeficienților săi.

a) Să se determine valorile parametrului γ pentru care $S > 0$, $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) În cazul în care $S = 0$, să se rezolve ecuația $P(x) = 2$.

17. Se dă polinomul $P(x) = x^4 - 1986x^3 + 1987x^2 - 1988x + 1986$.

a) Să se arate că restul împărțirii polinomului $P(x)$ la $x - 1985$ este 1984^2 .

b) Să se determine $a \in \mathbb{N}$, astfel încât restul împărțirii polinomului $P(x) + a$ la $x - 1985$ să fie egal cu 1986^2 .

18. Fie $P(x) = 2x^3 + x^2 - mx - 1$ și $Q(x) = 2x^3 + 3x^2 + nx + 1$, $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m și n , știind că P este divizibil cu $2x - 1$, iar Q este divizibil cu $2x + 1$.

b) Să se simplifice fracția $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

c) Pentru ce valori ale lui x , $F(x)$ este număr întreg?

19. Fie $P(x) = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + x^2 - 5x + 4$.

a) Să se rezolve ecuația: $P(x) = 0$.

b) Să se determine mulțimea: $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\}$.

20. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3 \text{ și } E_2 = x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3.$$

a) Să se descompună în factori.

b) Să se determine valorile lui x pentru care $\frac{E_1}{E_2}$ este definită și apoi să se simplifice ce $\frac{E_1}{E_2}$.

c) Să se determine x , astfel ca $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^* > 0$, unde $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^*$ este fracția obținută după simplificare.

2. Funcții

1. Să se reprezinte grafic:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x < -1 \\ 3, & x \in [-1, 2] \\ -3x + 9, & x > 2 \end{cases}.$$

2. Să se cerceteze dacă există funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să verifice simultan condițiile:

a) $f\left(\frac{1}{2} + x\right) + f\left(\frac{1}{2} - x\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) \cdot f(1 - x) = f(x) - x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$

3. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy , se consideră punctele $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$ și $C(2, 0)$.

a) Determinați funcția a cărei reprezentare grafică să fie reuniunea segmentelor AB și BC .

b) Calculați măsurile laturilor triunghiului ABC .

4. Se consideră funcția:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ mx + 2, & x \in [-1, \infty) \end{cases}.$$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $M(1, 7)$ să aparțină graficului funcției f și să se reprezinte grafic f în acest caz.

b) Pentru $m = 5$, $A = \{-4, -1, 0, 1, 3\}$, $B = \{x \in A \mid f(x) \leq 7\}$, să se determine $A \cup B$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $A \times B$.

5. Se consideră funcția:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3m}{2}, & \text{dacă } x \leq 2 \\ (m+1)x + m - 1, & \text{dacă } x > 2 \quad (m \in \mathbb{R}) \end{cases}.$$

Să se determine valorile lui m astfel încât funcția să fie monotonă.

6. Fie $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x + a) \leq x \leq f(x) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

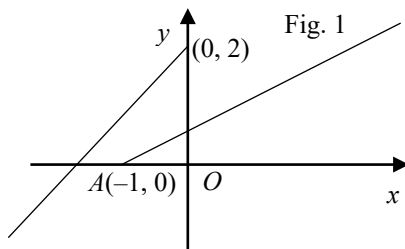
7. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ și $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}$, să se arate că sunt verificate relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} f(x) + \frac{x-1}{x+1} f(-x) - 2 &= \frac{4}{x^2 - 1}; \\ (x+2)f(x+1) &= xf(-x-1). \end{aligned}$$

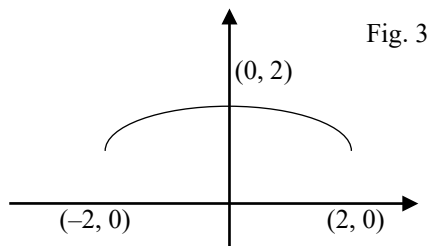
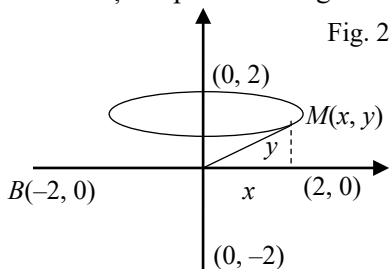
8. Să se arate că, prin simplificare, fracția: $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 12x + 3}{x^5 - x^4 - 9x + 9}$ nu își modifică domeniul de definiție.

9. Să se stabilească condițiile pentru ca funcția rațională $f(x) = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{a'x^4 + c'x^2 + e'}$ să aibă o valoare constantă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

10. Reprezentarea geometrică din figura 1 definește o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

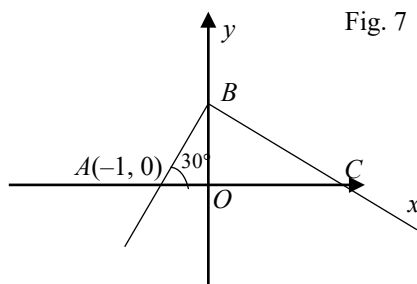
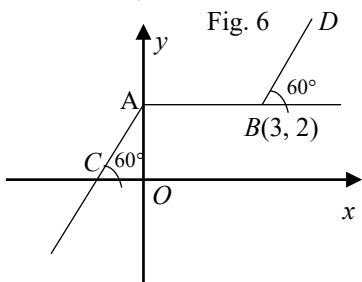
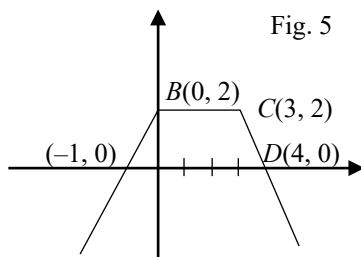
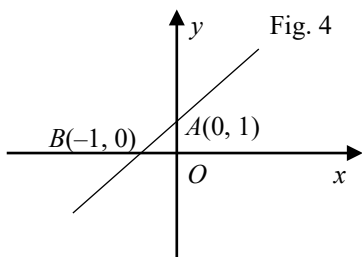


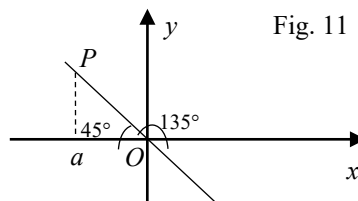
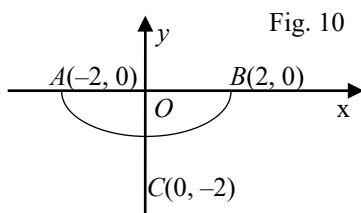
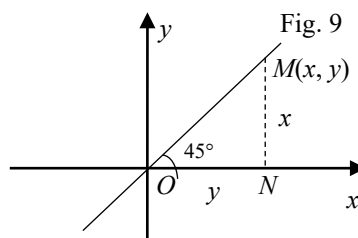
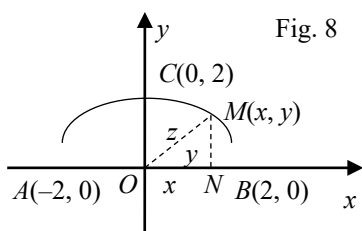
11. Definește reprezentarea geometrică din figura 2 o funcție $f: [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$?



12. Definește reprezentarea geometrică din figura 3 o funcție $f: [-2, 2] \rightarrow [0, 2]$?

13. În figurile 4-11 sunt date reprezentările geometrice ale graficului unei funcții. Să se stabilească în fiecare caz funcțiile respective.





14. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3}x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -\sqrt{3}x + 1$.
- a) Să se găsească coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- b) Să se arate că graficele celor două funcții determină un unghi de 60° .

15. Să se determine funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, știind că:

$$2f(x+1) + g(x-1) = 2x + 14, \quad f(x+1) - 2g(x-1) = 6x - 18.$$

16. Să se determine funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care îndeplinește următoarele condiții:

$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{N} \text{ și } f(1) = 1.$$

17. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$xf(y) + yf(x) = 2f(xy), \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & \text{dacă } x < 0 \\ 3, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x-1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

și să se rezolve ecuația

$$f(x) + f(-x) = 6.$$

19. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică relația:

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

20. Să se demonstreze că funcția $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{\sqrt{1+x^2} + x + 1}$$

este definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$ ($E = \mathbb{R}$) și că este impară, adică $f(-x) = -f(x)$.

3. Ecuații

Sisteme de ecuații

1. Să se afle x din egalitatea:

$$\frac{2,4 - \sqrt{4,1616}}{0,2} = \frac{(2\sqrt{2})^2 + 2^2}{5: \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{x}{9}}}}.$$

2. Să se calculeze x din proporția:

$$\frac{\left[\frac{1}{2} + 0, (3)\right] \cdot 0,8(3)}{[0,5 - 0, (3)] \cdot 0,1(6)} = \frac{\sqrt{2x-7}}{\left(0,25 + \frac{1}{5} - \frac{3}{20}\right) \cdot 0,1(3)}; x \geq \frac{7}{2}.$$

3. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2}{3}x + \frac{7}{8}x = 6 + \frac{2}{3 + \frac{15}{19}} - \frac{5}{6}x - \frac{8}{9}x.$$

4. Să se rezolve ecuațiile:

$$1) \frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0;$$

$$2) \frac{x}{a} - 1 : \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 1 : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right);$$

$$3) \frac{a^3-1}{a^3+1} = \frac{a(x-1) + a^2 - x}{a(x-1) - a^2 + x}.$$

5. Să se rezolve ecuația:

$$(ax+1)(bx+1) = (x+a)(x+b), a, b \in \mathbb{R}.$$

6. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{19x-1}{x} - \frac{x+1}{1-x} : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{1-x^2}\right) = x.$$

7. Să se rezolve ecuațiile:

$$a) |x+1| + |x-1| = 3;$$

$$b) |x| - |x+1| = 1.$$

8. Să se rezolve ecuația:

$$|2x + 1| + |2x - 1| = a$$

și să se discute după valorile parametrului real a .

9. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x}{x^2 - 3} \cdot \frac{(x^6 + 3x^4 - 9x^2 - 27)(x - 2)}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3)^2} = \frac{3}{x - 1}.$$

10. Să se rezolve ecuația:

$$(3x^2 - 4x + 1)^3 + (x^2 + 4x - 5)^3 = 64(x^2 - 1)^3.$$

11. Să se arate că dacă $m \in \mathbb{Q}$, toate soluțiile ecuației:

$$(2x + 1)^3 + (3x + m)^3 = (4x + 1)^3 + (x + m)^3$$

sunt raționale.

12. Să se determine toate soluțiile ecuației:

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x - 1)^2} = \frac{(a^2 - a + 1)^3}{a^2(a - 1)^2}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

13. 1) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2x^2 - mx + m}{x - 3} = 2x - 4,$$

unde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 9$, $m \neq 10$.

2) Dacă $x = \frac{12 - m}{10 - m}$, să se determine valorile întregi ale lui m pentru care x este un număr întreg.

14. Să se rezolve sistemele:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{3a} + \frac{y}{6b} = \frac{2}{3} \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ x - y = 4ab \end{cases};$$

$$3) \frac{x + 2y - 7}{1} = \frac{2y - x + 15}{2} = \frac{2x + y + 19}{3};$$

$$4) \frac{3x + y - 3}{6} = \frac{4x - 2y + 1}{3} = \frac{5x - 3y + 8}{5}.$$

15. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}; a^2-b^2 \neq 0. \\ ax+by=a^2+b^2 \end{cases}$$

16. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{2a-b} - \frac{y}{2a+b} = \frac{8ab}{4a^2-b^2}; 4a^2-b^2 \neq 0. \\ \frac{x}{2a-b} + \frac{y}{2a+b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{cases}$$

17. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y} = 6 \\ 4x+47y-22xy=8 \end{cases}; x \neq 2; y \neq 0.$$

18. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{7}{x+y} = \frac{8}{x+z} = \frac{9}{y+z} \\ (x+y)(y+z)(z+x) = 4032 \end{cases}.$$

19. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y = \frac{2}{m^2-1} \\ 2(m+1)x - (m-1)y = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

20. 1) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x-a}{xy-bx-ay+ab} + \frac{x-a}{xz-cz-az+ac} = \frac{2a}{a^2-b^2+2bc-c^2} \\ \frac{y-b}{xy-bx-ay+ab} + \frac{y-b}{yz-bz-cy+bc} = \frac{2b}{b^2-a^2+2ac-c^2} \\ \frac{z-c}{xz-cz-az+ac} + \frac{z-c}{yz-bz-cy+bc} = \frac{2c}{c^2-a^2+2ab-b^2} \end{cases}$$

cu $x \neq a, y \neq b, z \neq c$.

2) În ipoteza $a < b < c$, să se afle ce relații de inegalitate există între x, y și z .

21. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3} ; b_1, b_2, b_3, b_1 + b_2 + b_3 \neq 0 . \\ x_1 + x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

22. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{b} ; a, b > 0.$$

23. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x + y + z}{d} = \frac{y + z + t}{a} = \frac{z + t + x}{b} = \frac{x + y + t}{c} = \sqrt{xyzt} .$$

24. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului m sistemul:

$$m^2 x + y = m; m(x + y) = 1 .$$

25. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 - x_1}; x_2 = \sqrt{x_3^2 - x_2}; \dots; x_8 = \sqrt{x_1^2 - x_8} .$$

26. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x - a_1}{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n} + \frac{x - a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{x - a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = n ,$$

unde $a_i > 0, i \in \mathbb{N}$.

27. Să se elimine x și y din relațiile:

$$x - y = a; x^2 - y^2 = b; x^3 + y^3 = c .$$

28. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$x + y + z + t = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2} + 2 .$$

29. Să se determine numerele x, y, z care verifică simultan relațiile:

$$xy + yz + xz = -1, x + y + z + xyz = 0 .$$

30. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{-2x + 3y + 5z}{a} = \frac{2x - 3y + 5z}{b} = \frac{2x + 3y - 5z}{c} \\ xyz = \frac{d^3}{30} \end{cases} ,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*, d \in \mathbb{R}$.

4. Ecuația de gradul II

1. Să se rezolve ecuația:

$$2x^2 + (5a - 7)x + 2(3 - 5a) = 0.$$

Să se determine a , astfel încât rădăcinile ecuației să fie inverse una celeilalte.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, astfel încât rădăcinile ecuației:

$$x^2 - mx + m = 0$$

să satisfacă relația:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^3 + x_2^3.$$

3. Să se afle cea mai mare valoare pe care o poate lua expresia:

$$P(x) = 5 - (2 - 3x^2)^2.$$

4. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât ecuația

$$6x^2 - 5(k - 1)x + k^2 - k - 6 = 0$$

să admită rădăcini numere naturale.

5. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 4x + 3 + \frac{1}{2x^2 - 8x + 7} = 1.$$

6. Să se demonstreze că ecuația:

$$5x^2 + 50y^2 - 26xy + 8x - 46y + 15 = 0$$

nu admite soluții în mulțimea numerelor reale.

7. Se consideră $P(x) = x^2 + ax + 3$, $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă $P(x + 1) = P(x) + 2(x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, atunci ecuația $P(x) = 0$ nu are rădăcini reale.

8. Să considerăm expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2 + (b - a)x - ab}{x^2 + (b + a)x + ab}; \quad E_2 = \frac{x^2 + (2 - b)x - 2b}{x^2 - (2 + b)x + 2b}; \quad E_3 = \frac{x^2 + (b + 3)x + 3b}{x^2 + (b - 2)x - 2b}.$$

a) Să se determine valorile lui x pentru care fracțiile există.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația:

$$E_1 \cdot E_3 + E_2 = 0$$

să aibă o rădăcină egală cu 3, apoi să se determine cealaltă rădăcină.

9. Se dă ecuația:

$$2x^2 + (5a - 7)x + 2(3 - 5a) = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Să se rezolve ecuația.

b) Să se determine a , astfel ca rădăcinile ecuației să fie inverse una celeilalte.

c) Să se determine a , astfel încât $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

10. Să se determine minimul expresiei:

$$E(x, y) = 4y^2 - 4xy + 2x^2 - 4y + 3$$

și valorile lui x și y pentru care acest minim este realizat.

11. Să se arate că ecuația:

$$6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a) = 0$$

admite rădăcini reale pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Să se afle valoarea minimă a fracției:

$$F = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 5}.$$

13. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel ca expresia:

$$E(x, y, z) = x^2(1 + y^2 + y^2z^2) - 4x(1 + y + yz) + 12$$

să fie minimă.

14. Se consideră ecuația în x :

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = a.$$

a) Să se arate că rădăcinile ecuației date sunt reale $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine a , astfel încât să avem $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = a$.

15. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și $a - 4b + 16c = 0$, atunci ecuațiile $ax^2 + bx + c = 0$ și $cx^2 + bx + a = 0$ admit rădăcini raționale.

16. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel ca $a \neq c$. Să se demonstreze că ecuațiile:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ și } cx^2 + bx + a = 0$$

au o rădăcină comună dacă și numai dacă $|a + c| = |b|$.

17. Să se arate că $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se descompune în produs de factori de gradul I cu coeficienți reali dacă și numai dacă este îndeplinită condiția:

$$P(1) \cdot P(-1) \leq (a - c)^2.$$

18. Fie polinoamele $f(x) = ax^2 + bx + c$ și $g(x) = cx^2 + bx + a$, cu $a > c$. Să se arate că:

a) Dacă $x_0 = \frac{2t}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, atunci $f(x_0) \leq g(x_0)$.

b) Dacă $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$ au o rădăcină comună, atunci:
 $a + b + c = 0$ sau $a - b + c = 0$.

19. Să se arate că ecuația: $(x-a)(x-b) = c^2$ are rădăcini reale oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$. Notând cu x_1, x_2 rădăcinile ecuației, să se calculeze în funcție de a, b, c expresia:

$$E = x_1^4 + x_2^4.$$

5. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor

1. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația:

$$3xy - 4y^2 = 18.$$

2. Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$(x + 2)(y + 5) - 2(x + 1)(y + 2) = 5.$$

3. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 3 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$$

4. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$x + y^z = xyz.$$

5. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$8x^2 - 6xy + y^2 - 5 = 0.$$

6. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$xy + 3x + 2y + 5 = 0.$$

7. Să se determine mulțimea:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 19x + 85y = 1985\}.$$

8. În ipoteza că $x \neq y$, să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$x(x - 8) = y(y - 8).$$

9. Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, atunci și $x + y - xy \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$xyz - yz - 3xz - 5xy + 3z + 5y + 15x - 16 = 0.$$

11. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0.$$

12. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{N}$ ecuația:

$$x^2y + x^2 - 180 = 0.$$

13. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$x^y - x^z = 992.$$

14. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$6x^2 - 13xy + 6y^2 = 19.$$

15. Să se determine două numere naturale, astfel încât să fie divizibile între ele, cel mai mic să fie pătrat perfect, iar diferența lor să fie 1975.

16. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$xy + \frac{x}{y} + 2x = 75.$$

17. Să se afle numerele întregi x, y, z , $0 < z < y < x$, astfel ca:

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 1000.$$

18. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ care verifică relația:

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 8x + 2y - 2xy + 2xz - 16z + 35 = 0.$$

19. Să se afle valorile $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care este satisfăcută ecuația:

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 2y - 2.$$

20. Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{3-y} = 2.$$

22. Să se rezolve în $\mathbb{N}^*$ ecuația:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} = 1.$$

6. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

1. Raportul a două numere este 8. Primul număr mărit cu 39 este de 37 de ori mai mare decât al doilea micșorat de 3 ori. Să se afle aceste numere.

2. Se dau patru numere a căror sumă este 396. Dacă la primul se adaugă 5, din al doilea se scade 5, al treilea se înmulțește cu 5, iar al patrulea se împarte la 5, se obțin patru numere egale între ele. Care sunt acele numere?

3. După ce a parcurs 13 km, un excursionist își dă seama că trebuie să mai străbată $\frac{2}{5}$ din restul drumului pentru a ajunge la jumătatea lui. Să se determine lungimea drumului. Câți hectometri trebuie să mai fie parcurși pentru a străbate $\frac{3}{5}$ din drum?

4. O echipă (a doua) a realizat de patru ori mai multe piese ca prima, a treia echipă a realizat cât media geometrică a primelor două, iar a patra echipă cât media aritmetică a

echipelor a II-a și a III-a. Cele patru echipe au realizat împreună 100 de piese care reprezintă $\frac{1}{2}$ din întreaga producție. Câte piese mai trebuie să realizeze fiecare echipă pentru ca producția să fie egală pentru fiecare echipă?

5. Să se găsească două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 1805, iar cel mai mare divizor comun al lor este 19.

6. Să se arate că un singur număr natural de două cifre se împarte exact la suma cifrelor sale, dând drept cât tot suma cifrelor sale. Care este acest număr?

7. Să se afle trei numerele, dintre care al doilea să fie mai mare decât primul cu atât cu cât al treilea este mai mare decât al doilea, dacă se știe că produsul celor două numere mai mici este egal cu 85, iar produsul celor două numere mai mari este egal cu 115.

8. 72 de lei trebuiau împărțiți în mod egal la câțiva elevi. Dacă ar fi cu trei mai puțini, atunci fiecare i-ar reveni cu patru lei mai mult. Câți elevi au fost?

9. Numărul a este media aritmetică a trei numere oarecare, b este media aritmetică a pătratelor lor. Să se exprime cu ajutorul lui a și b media aritmetică a produselor a două câte două.

10. Doi muncitori, lucrând împreună, realizează o lucrare în 8 ore. Primul dintre ei, lucrând separat, poate îndeplini întreaga lucrare cu 12 ore mai repede decât al doilea muncitor dacă acesta ar lucra și el separat. În câte ore fiecare dintre ei, lucrând separat, poate termina lucrarea?

Indicație: Fie x numărul orelor în care primul muncitor îndeplinește lucrarea. Se obține ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$.

11. Ce număr x trebuie adăugată celor trei laturi a , b , c ale unui triunghi oarecare, pentru a se obține un triunghi dreptunghic?

Indicație: Dacă a este latura mai mare, avem: $(a+x)^2 = (b+x)^2 + (c+x)^2$. Discriminantul $\Delta = 2(a-b)(a-c)$ este totdeauna pozitiv, deci problema este totdeauna posibilă.

12. Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu 24 cm², iar lungimea ipotenuzei este egală cu 10 cm. Să se afle lungimea catetelor.

Indicație: Notăm cu x , y catetele triunghiului. Avem:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 24 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 96 \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 14 \\ xy = 48 \end{cases}.$$

13. Să se determine catetele unui triunghi dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$), știind că punctul de tangență a cercului înscris triunghiului împarte ipotenuza BC în două segmente $BD = 12$ cm și $DC = 5$ cm.

Indicație: Dacă x este raza cercului, atunci:

$$AB = 12 + x; AC = 5 + x; (x + 12)^2 + (x + 5)^2 = 289.$$

Rezultă că $x = 3$ (soluția convenabilă), deci $AB = 15$; $AC = 8$.

14. Laturile unui triunghi oarecare ABC sunt $AB = 15$ cm, $BC = 13$ cm, $AC = 14$ cm. Să se calculeze înălțimea BD .

Indicație: Fie $AD = x$ cm; $DC = (14 - x)$ cm. Se exprimă BD în două moduri (aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile DAB și DBC): $15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$; rezultă că $x = 9$ cm.

15. Un triunghi are ipotenuza de 25 cm, iar suma dintre o catetă și proiecția ei pe ipotenuză este de 24 cm. Să se afle mărimea celor două catete.

Indicație: Notând cu x proiecția catetei pe ipotenuză, avem $(24 - x)^2 = 25x$; convine numai soluția $x = 9$ cm. Deci cele două catete sunt 15 cm și 20 cm.

7. Identități

1. $(x + y)^3 - 3xy(x + y) = x^3 + y^3$.

2. $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

3. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$ (Lagrange).

4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

5. $(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$.

6. Să se determine m , astfel încât $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ să fie divizibil prin $x + y + z$.

7. Dacă $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$, atunci:

$$\frac{a^2(b - c)}{b + c} + \frac{b^2(c - a)}{c + a} + \frac{c^2(a - b)}{a + b} = -(a + b + c)^2 \frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{(b + a)(c + a)(a + b)}.$$

8. $a(bx + cy)^2 - 2b(ax + by)(bx + cy) + c(ax + by)^2 = (ac - b^2)(ax^2 + 2bxy + cy^2)$.

9. Să se arate că:

$$(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc.$$

10. Dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, atunci:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{a^2 + c^2}{ac} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = 0.$$

11. Dacă $a \neq b \neq c \neq a$, atunci:

$$\frac{a^2 - bc}{(a-b)(b-c)} + \frac{b^2 - ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2 - ab}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

12. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Să se verifice egalitatea:

$$a + \frac{a}{a^n - 1} = a^n \cdot \frac{a}{a^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

13. Să se arate că:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

14. Folosind relația de la exercițiul anterior, să se arate că:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} = \frac{5}{11};$$

$$\frac{1}{11 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 21} = \frac{5}{231}.$$

15. Să se demonstreze că următoarele relații sunt echivalente:

$$(1) \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

(2) $(a + b + c + d)(a - b - c + d) = (a - b + c - d)(a + b - c - d)$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

16. Dacă $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci avem și:

$$a(d - c) + b(a - c) + c(d - a) = 0.$$

17. Să se arate că dacă $a + b = 1$, atunci:

$$a^4 + b^4 - 2a^3 - 2b^3 - 2a^2b^2 + a^2 + b^2 = 0.$$

18. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$ și $\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = 0$, atunci:

$$\frac{bc + b - c}{b^2c^2} + \frac{ca + c - a}{c^2a^2} + \frac{ab + a - b}{a^2b^2} = 0.$$

19. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{a-bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{b-ca}{(a-b)(b-c)} + \frac{c-ab}{(c-a)(b-c)} = 1.$$

20. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietățile:

$$1 + xy \neq 0, 1 + yz \neq 0, 1 + xz \neq 0, \frac{xy}{1+xy} + \frac{yz}{1+yz} + \frac{xz}{1+xz} = 3 \text{ și } x + y + z = 0.$$

Atunci:

$$xy + yz + xz = -\frac{3}{2}.$$

21. Să se calculeze:

$$E = a^2 - a + b^2 - b + 2ab + 1,$$

știind că $a + b = 3$.

22. Sa se arate că dacă există relațiile $a^3 + b^3 + c^3 = 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ și $a + b + c = 1$, atunci $abc = 0$.

23. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$, atunci:

- 1) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$;
- 2) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$;
- 3) $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$;
- 4) $5(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a^5 + b^5 + c^5)$;
- 5) $10(a^7 + b^7 + c^7) = 7(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)$.

24. Să se demonstreze identitatea:

$$9(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 8(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac - 4bc)^2.$$

25. Să se demonstreze că:

$$\frac{ab(a+b)}{(a-c)(b-c)} + \frac{bc(c+b)}{(b-a)(c-a)} + \frac{ca(c+a)}{(c-b)(a-b)} = a + b + c.$$

8. Inegalități

Să se demonstreze că au loc următoarele inegalități:

$$1. x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

$$2. \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

$$3. \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \pm xy + y^2 \geq 0.$$

$$4. \forall x, y \geq 0 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

$$5. \forall a, b, c > 0 \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

$$6. \forall x, y, z \geq 0 \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

$$7. \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } x+y+z \geq 0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz.$$

$$8. a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2).$$

$$9. x, y, z \geq 0 \Rightarrow xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \leq 2(x^3+y^3+z^3).$$

$$10. \forall n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

$$11. \forall n > 1 \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

$$12. \text{ Dacă } x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq xy+yz+xz \leq 1.$$

$$13. \text{ Dacă } ab+bc+ca=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 > 1.$$

$$14. x > y > z > 0 \Rightarrow x^3 > xyz > z^3.$$

$$15. \text{ Dacă } a^2+b^2+c^2=1 \text{ și } x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow -1 \leq ax+by+cz \leq 1.$$

$$16. \text{ Dacă } x+y+z=0 \Rightarrow x^2 \geq 4yz.$$

$$17. \text{ Dacă } x+y+z=0, \text{ atunci } (-x+y+z)^2 - 4(x-y+z)(x+y-z) \geq 0.$$

18. Să se rezolve ecuațiile:

$$1) \frac{3x-1}{2-x} \geq 1;$$

$$2) \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}} < 1.$$

19. Să se rezolve inecuațiile:

$$1) \frac{2x-3}{3-x} \leq 2;$$

$$2) \frac{2x-3}{3-x} > 5-2x.$$

20. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului real m inecuația:

$$\frac{2x - m}{m - 2} > 1 - x.$$

21. Să se rezolve inecuația:

$$x + \frac{1}{x - 1} < -\frac{1}{2}.$$

22. Să se determine mulțimea valorilor lui x care verifică sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x - 4}{2} + 2 > \frac{x + 3}{3} \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{x + 4}{2} \geq -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

23. Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, are loc următoarea inegalitate:

$$4a^2 - 7ab + 5b^2 > 0.$$

24. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, atunci:

$$-\frac{3}{2} \leq ab + bc + ca \leq 3.$$

În ce caz are loc egalitatea?

25. Fie $a, b > 0$, astfel încât $a + b = 1$. Să se arate că:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

26. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

1) $a^2 + b^2 = 1$ implică $-\frac{1}{2} \leq ab \leq \frac{1}{2}$;

2) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ implică $-1 \leq ab + bc + ca \leq 1$.

27. Să se demonstreze că dacă $ax^2 + by^2 = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, atunci:

$$ax + by \leq \sqrt{c(a + b)}.$$

28. Fie $a, b > 0$. Să se arate că dacă $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, atunci $a + b \geq 4$.

29. Dacă $a, b, c > 0$, atunci:

$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}.$$

30. Să se demonstreze că pentru orice $a, b > 0$ au loc inegalitățile:

$$1) \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}; \quad 2) \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

31. Să se arate că dacă $a^3 + b^3 + 3abx < 0$ și $x \leq a + b$, atunci $x < 0$.

32. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a + b + c = s$, atunci:

$$ab + bc + ca \leq \frac{s^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

33. Dacă $0 < a < b < c$, atunci $a < \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} < c$.

34. Să se demonstreze că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ și $a + b + c = 1$, atunci are loc dubla inegalitate:

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + \sqrt{b^2 + (a+c)^2} + \sqrt{c^2 + (a+b)^2} < 3.$$

35. Știind că $0 \leq x \leq 8$, $1 \leq y \leq 7$, $0 \leq z \leq 9$, să se demonstreze că:

$$3 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{\sqrt{2y+2}}{4} + \frac{\sqrt{z+16}}{2} \leq 5.$$

36. Dacă $a, b, c \geq 0$, atunci:

$$(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 64a^3b^3c^3.$$

Dacă în plus $a, b, c \neq 0$, atunci:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \geq 64.$$

37. Fie $a, b \geq 0$, $x, y \geq 0$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\left(\frac{ax}{y} + b \right)^2 + \left(\frac{ay}{x} + b \right)^2 \geq 2(a+b)^2.$$

38. Să se arate că:

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{1+2^n}{1+3^n} < \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

39. Să se arate că oricare ar fi $a, b > 0$, $x \geq 1$, avem:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{x}{ax+b} < \frac{1}{a}.$$

40. Dacă $a, b, c > 0$, atunci:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

41. Fie $x, y, z > 0$ și a, b, c cu proprietatea că: $\frac{x}{a} = y + z$; $\frac{y}{b} = z + x$; $\frac{z}{c} = x + y$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6.$$

42. Fie $a, b, c, d > 0$, astfel încât $a + b = c + d$. Să se arate că:

a) $ab > cd \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 + d^2$ și reciproc;

b) dacă $ab > cd$, atunci $|a - b| < |c - d|$;

c) $a^2 + b^2 < c^2 + d^2 \Rightarrow |a - b| < |c - d|$.

43. Fie $S = a + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + b$, unde $a, b > 0$. Dacă $S = 10$, să se arate că $ab \leq 16$.

44. Să se arate că pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 1$, $a \neq b$ avem relația:

$$a^4 + b^4 + 7 \geq 10(a - b)^2.$$

În ce caz avem egalitate?

45. Fie x, y, z trei numere reale pozitive, distincte cel puțin două, pentru care $xyz = 1$. Să se arate că:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx > \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

46. Să se arate că dacă ecuația $(x - y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0$ este satisfăcută, atunci x și y nu pot fi negative. Dacă $x > 1$, $y < x$, atunci $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$, iar dacă $x < 1$, $y < 1$, atunci $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

47. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 313 \text{ și } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 105.$$

Să se arate că:

$$13(x^2 + y^2 + z^2) < (x + 2y + 3z)^2.$$

48. Să se demonstreze că dacă $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

49. Dacă $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, atunci are loc inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

50. Dacă $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$, atunci $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}$.

51. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$x^4 + x^2 + 1 \geq \frac{3}{2}x(x^2 + 1).$$

52. Să se arate că:

$$x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

53. Să se precizeze care din următoarele propoziții sunt adevărate:

$$P_1: |x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1| > 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$P_2: \exists x \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } |x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 1| = 0;$$

$$P_3: |x^2 + 1| + |x^2 - 1| > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

54. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{11_x}{111_x + 21_x} < 1,$$

unde x este baza sistemului de numerație.

55. Fie $x, y > 0$. Dacă $x^4 + y^4 = x^2 - y^2$, atunci $x^4 + y^4 < 1$.

56. Fie $x, y < 0$, astfel încât $3(x^3 - y^3) \leq 7(x + y)$. Să se arate că $x^2 + y^2 > \frac{7}{3}$.

57. Să se demonstreze că dacă $a, b \geq 0$, atunci:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq \sqrt{2(a+b)} + \sqrt[3]{4(a+b)}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

58. Să se arate că pentru orice $x \geq n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{x-n} + \sqrt{x-n+1} + \dots + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} + \dots + \sqrt{x+n} < 2n\sqrt{x}.$$

59. Dacă $0 < x, y < 2$, atunci $\left| \frac{x-y}{x+y-xy} \right| < 1$.

60. Fie $x, y, z \in [1, \infty)$; să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$, astfel încât:

$$E = xyz - xy - yz - zx + x + y + z - m \geq 1.$$

9. Diverse

1. Să se determine mulțimile A și B , știind că satisfac simultan condițiile:

- a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- b) $A \cap B = \{1, 3, 4\}$;
- c) $A \setminus B = \{2, 6\}$.

2. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} \right\}; \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x + 1}{x + 1} \right\}.$$

Arătați că $A = B = \{-2\}$.

3. Se dă numărul $N = 2^7 - 2^6 - 2$.

- a) Să se scrie acest număr ca o sumă de puteri naturale consecutive ale lui 2.
- b) Se cere același lucru pentru numărul:

$$M = 2^{n+1} - 2^n - 2, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

4. Să se arate că dacă $a = (5 - 2\sqrt{6})b$, atunci:

$$\frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2} = \frac{13 - 5\sqrt{6}}{12 - 5\sqrt{6}}.$$

5. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc:

$$\frac{(2 + \sqrt{3})^n + 1}{(2 + \sqrt{3})^n - 1} + \frac{(2 - \sqrt{3})^n + 1}{(2 - \sqrt{3})^n - 1} = 0.$$

6. Să se arate că dacă $m, n \in \mathbb{N}$, expresia:

$$E = \frac{3(-1)^m + 7(-1)^{1-n} \cdot (-1)^{2n-1}}{2(-1)^m \cdot (-1)^{2-m}}$$

este un număr întreg.

7. Să se determine baza de numerație x în care este adevărată egalitatea:

$$\left(\overline{121}_x \right)^2 = \overline{14641}_x.$$

8. Pentru $n \in \mathbb{N}$, să se calculeze:

$$E = \frac{3^{n+1} \cdot 2^{2n+2} + 7 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^{2n+1} \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^{2n+2} - 49 \cdot 3^n \cdot 2^{2n} + 2^{2n+1} \cdot 3^{n+2}}.$$

9. Să se arate că fracția $E \frac{7^{2n+1} + 2^{3n+5} + 2 \cdot 2^{3n}}{3^2 \cdot 2^{n+1} + 23 \cdot 43^n}$ se simplifică cu 41 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

10. Fie m, n două numere naturale pare, iar q media lor aritmetică. Care din numerele:

$$A = \frac{10^n + 1}{10^q + 1} \text{ și } B = \frac{10^q + 1}{10^m + 1}$$

este mai mare?

11. Să se calculeze numărul care trebuie adunat la numărătorul și numitorul fracției $\frac{3}{8}$ pentru ca fracția să se dubleze.

12. Să se determine numerele naturale n cu proprietatea:

$$0 < \sqrt{n} - \sqrt{29} < 1.$$

13. Să se arate că $\sqrt{a^2 + b^2} \notin \mathbb{Q}$, oricare ar fi a, b numere naturale impare.

14. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x - a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{x - a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{x - a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = n,$$

unde $a_i > 0, \forall i = \overline{1, n}$.

15. Dacă $\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = 0$, atunci:

$$\frac{1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{1}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

16. Să se demonstreze că dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^3 + y^3 + z^3 \neq 0$, atunci fracția:

$$\frac{2xyz - (x + y + z)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

are valoarea $\frac{2}{3}$ dacă și numai dacă $x + y + z = 0$.

17. a) Să se arate că dacă numerele a, b, c verifică relația:

$$ab + bc + ca = 0,$$

atunci ele verifică și relația:

$$b^3 c^3 (a + b)(a + c) + c^3 a^3 (b + c)(b + a) + a^3 b^3 (c + a)(c + b) = 0.$$

b) Utilizând identitatea:

$$m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - mp - np),$$

se cere să se simplifice expresia:

$$E = \frac{(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-b-c)^3 + (x-c-a)^3 + (x-a-b)^3 - 3(x-a-b)(x-b-c)(x-c-a)}.$$

c) Ce devine expresia E pentru:

$$x = \frac{(2\sqrt{2}-1)(a+b+c)}{3(\sqrt{2}-1)}?$$

18. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Să se arate că dacă una din următoarele relații are loc:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1+y+z} = 0, \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{1+z+x} = 0, \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{1+x+y} = 0,$$

atunci au loc și celelalte două.

19. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(1+ab)(1+bc)(1+ac) \neq 0$. Să se arate că dacă una din relațiile următoare are loc:

$$a + \frac{b+c}{1+bc} = 0, \quad b + \frac{a+c}{1+ac} = 0, \quad c + \frac{a+b}{1+ab} = 0,$$

atunci au loc și celelalte două.

20. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât $xyz = 1$ și $1+x+xy \neq 0$. Atunci:

$$1+y+yz \neq 0, \quad 1+z+zx \neq 0 \quad \text{și} \quad \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

21. Se dau relațiile:

$$x^2y^2 + z^2t^2 = 3 \quad \text{și} \quad (xy+zt)^4 - (xy-zt)^4 = 48.$$

Să se calculeze produsul $xyzt$.

22. Să se afle valoarea maximă a produsului xy dacă $3x+2y=7$. Care sunt valorile lui x și y corespunzătoare?

23. Dacă $z = \frac{xy}{x+y}$, cu $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$, să se demonstreze că:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{Q}.$$

24. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $a+b > 0$. Atunci:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4}.$$

25. Să se determine numărul real a , astfel încât polinomul:

$$P(x) = x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + a$$

să fie divizibil cu polinomul $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

26. Se dă mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Se pot scoate elemente din această mulțime, astfel încât suma lor să fie 1985, iar produsul lor să se dividă cu 10^{24} ?

27. Să se stabilească semnul numărului:

$$N = \sqrt{4 + \sqrt{15}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}} - 2\sqrt{2}.$$

28. Să se demonstreze că numărul:

$$N = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

este divizibil cu 19.

29. Să se arate că numărul $A = 7^{n+2} \cdot 3^n - 49$, $n \in \mathbb{N}$, este divizibil prin 980.

30. Să se demonstreze că 111111_{1991} se divide prin 111_{1990} , indicii fiind baze de numerație.

31. Să se demonstreze că numărul:

$$N = 1997 \cdot 1990^{659} + 6$$

este divizibil prin 1991.

32. Să se arate că numărul:

$$N = 2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{n+3} - 22 \cdot 3^n$$

este divizibil prin 13.

33. Să se arate că:

$$\frac{36^n + 12 \cdot 6^n + 32}{5 \cdot 6^n + 40} \in 2\mathbb{N} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

unde $2\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor pare.

34. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fracțiile:

$$A = \frac{2^{2n+1} + 1}{2^{2n} - 1} \text{ și } B = \frac{2^{6n+3} + 1}{2^{4n} - 1}$$

se simplifică cu 3.

35. Dacă p este un număr prim diferit de 3, atunci una din expresiile:

$$E_1 = p^3 - 3p^2 + 2 \text{ și } E_2 = p^3 - 3p^2 + 4$$

este divizibilă cu 9.

36. Un număr împărțit la 7 dă un cât care este cu 125 mai mic decât numărul inițial și un rest care este egal cu sfertul câtului. Să se afle acel număr.

37. Să se găsească baza unui sistem de numerație în care numărul 856 din sistemul zecimal se va scrie 31120.

38. Să se arate că suma și diferența pătratelor oricăror două numere naturale consecutive nu e divizibilă cu 1000.

39. Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$E_1 = 2^{n+2} + 3^{2n+1}$ este divizibil prin 7;

$E_2 = 3^{n+2} + 4^{2n+1}$ este divizibil prin 13;

$E_3 = 4^{n+1} + 5^{2n-1}$ este divizibil prin 21.

40. Să se demonstreze că expresia:

$$E = \frac{a^5 - 5a^2 - 6a}{15} + \frac{a^4 + a^3}{3}$$

este un număr întreg, divizibil la 8, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.

41. Fie $0 < a < b$ și $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Să se afle valoarea raportului $\frac{a+b}{a-b}$.

42. Să se arate că $1985^{4n} + 1985^{2n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, este un număr compus.

43. Să se arate că pentru niciun număr natural n numărul $n^2 + 7n + 13$ nu poate fi divizibil cu $n + 3$. La fel $n^2 + 7n + 14$.

44. Să se demonstreze că suma cuburilor a cinci numere naturale consecutive se divide la 5.

45. Să se demonstreze că împărțind la 8 pătratul oricărui număr impar, obținem un rest egal cu unitatea.

46. Dacă p este un număr prim, $p > 3$, atunci numărul $p + 1$ nu poate fi pătrat perfect.

47. Să se demonstreze că, folosind două vase, unul de 6 l și altul de 9 l capacitate, nu pot fi măsurați 5 l de apă.

48. Să se arate că dacă din produsul a patru numere consecutive se scade dublul produs al numerelor extreme se obține pătratul produsului numerelor extreme.

49. Să se demonstreze că suma cuburilor a trei numere consecutive este totdeauna un multiplu de 3.

50. Să se arate că pentru orice $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, numărul:

$$M = (n + 3p + 3^q)(n - 1)(n + 1)$$

se divide prin 3.

51. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, expresia $E = n^3 + 5n$ este divizibilă prin 6.

52. Să se arate că numărul $P(x) = x^6 - 5x^4 + 4x^2$, $x \in \mathbb{N}^*$ se divide cu 360.

53. Dacă $n \in \mathbb{N}$, să se arate că $n^2 + 1$ nu se divide prin 7.

54. Să se demonstreze că, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}$, fracția:

$$F = \frac{m^2 n + mn^2}{p^2 + p}$$

nu este ireductibilă.

55. Să se demonstreze că, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}^*$, fracția:

$$F(x, y) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 y + x + x^2 + 2xy + y^2 + y + xy^2}$$

nu poate fi ireductibilă.

56. Să se afle valoarea minimă a fracției:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3}.$$

57. Fie fracția $F(n) = \frac{3n+2}{4n+1}$, n natural. Să se determine n , astfel încât $f(n)$ să fie reductibilă.

58. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{5\sqrt{7} + 11x\sqrt{35}}{\sqrt{5} + 11x}.$$

Pentru ce valori ale lui x expresia nu este definită?

59. Să se arate că expresiile:

$$E_1 = ab(1 + a - b)^2 - (a^2 + b^2)(1 + a - b) + ab \text{ și}$$

$$E_2 = ab(1 - a + b)^2 - (a^2 + b^2)(1 - a + b) + ab$$

sunt divizibile prin $(a - b)^2$.

60. a) Să se arate că $E = (na + b + c)(a + nb + c)(a + b + nc) - (n - 1)^3 abc$ este divizibilă cu $a + b + c$.

b) Să se afle câtu.

61. Fie m, n ($m, n \neq 0$) două numere întregi consecutive. Să se arate că $m^4 + m^2 + 1$ și $n^4 + n^2 + 1$ nu sunt relativ prime între ele.

62. Să se demonstreze că:

- a) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n};$
 b) $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2};$
 c) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$

63. Să se arate că:

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{722}; \\ \sqrt{18} - \sqrt{8} &= \sqrt{50} - \sqrt{32} = \sqrt{200} - \sqrt{162} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

64. Să se calculeze:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} + \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{12}(\sqrt{4}+\sqrt{3})}.$$

65. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}^*.$$

66. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu $abc = 1$ și $ab - a - 1 \neq 0$. Atunci următoarea expresie este bine definită și se cere să se aducă la o formă mai simplă:

$$E = \frac{ac}{ac+c-1} - \frac{b}{bc-b+1} - \frac{1}{ab-a-1}.$$

67. Să se arate că numărul $a = \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}$ este rațional.

68. Se consideră numerele:

$$x = \sqrt[3]{41+14\sqrt{109}} + \sqrt[3]{41-14\sqrt{109}}; y = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}.$$

Să se calculeze $(x-y)^n, n \in \mathbb{N}$.

69. a) Scrieți numerele naturale 13 și 31 ca diferență de pătrate. Să se generalizeze pentru orice număr impar.

b) Să se calculeze suma:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 1993.$$

70. a) Să se arate că oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, altfel încât $a - b = 2$, atunci:

$$a^3 - b^3 = 8 + 6ab.$$

b) Folosind a), să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{5+x} - \sqrt[3]{x-3} = 2$, unde $x \in \mathbb{R}$.

71. Dacă a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, să se afle x, y, z din sistemul:

$$\frac{x(y+z)}{x+y+z} = a; \frac{y(z+x)}{x+y+z} = b; \frac{z(x+y)}{x+y+z} = c.$$

72. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{n}.$$

Să se deducă de aici că $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

73. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{3x+1}{2} \right] = x+1,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

74. Să se rezolve ecuația:

$$[x^2] = [x]^2,$$

unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x .

75. Să se rezolve ecuația:

$$\{x^2\} = \{x\}^2,$$

unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x .

76. Să se rezolve inecuația:

$$[x] \cdot \{x\} < x - 1,$$

unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

77. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \left| x = \frac{3a+1}{3a-5}, a \in \mathbb{N} \right. \right\}, \quad B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \left| y = \frac{4b+1}{3b-4}, b \in \mathbb{N} \right. \right\}.$$

Să se determine $A \cap B$.

78. a) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$n^2(n^{n-2} - 1) \geq 9(3^{n-2} - 1).$$

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$x^r + 9 = x^2 + 3^r.$$

79. Determinați numerele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ care satisfac simultan inegalitățile.

$$a + b + c \geq 6; a + b + d \leq 5; a + c + d \leq 1; b + c + d \leq 3; d \geq 0.$$

Liviu Pârșan

80. Să se determine tripletele de numere naturale x, y, z care verifică simultan relațiile:

$$x - 2z \geq 1; y - z \leq 1; 2y - z \geq 1.$$

81. Fie numerele a, b, c, d , astfel încât:

$$0 \leq a \leq b \leq c \leq d \text{ și } a + b + c + d = 4.$$

Să se afle cea mai mare valoare pe care o poate lua fiecare din variabilele a, b, c, d .

Kvant

82. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

$$\min\{(a-b)^2, (a-c)^2, (b-c)^2\} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

83. Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ și suma $S_f(n) = \sum_{k=1}^n [f(k+1) - f(k)]$. Plecând de la identita-

tea:

$$S_f(n) = f(n+1) - f(1),$$

să se calculeze $S_f(n)$ în cazurile:

$$f(n) = n \text{ și } f(n) = n^2.$$

RAȚIONAMENTUL ÎN MATEMATICĂ.

PRINCIPII ȘI METODE

1. Structura raționamentului matematic

În matematică avem de-a face cu propoziții. O propoziție care afirmă ceva este compusă din trei părți: *ipoteza* sau ceea ce se dă, *concluzia* sau ceea ce trebuie să demonstrăm și *implicația* sau metoda de demonstrare. Așadar, avem următoarea schemă:

$$\begin{array}{ccccc} \text{(Ipoteză)} & & \text{implicație} & & \text{(concluzie)} \\ A & \Rightarrow & & & B \end{array}$$

sau simbolic: „ $A \Rightarrow B$ ”. Formularea se face de regulă la modul condițional:

„Dacă A este adevărată, atunci și B este adevărată”.

Este firesc să gândim că plecând de la o ipoteză corectă, printr-un raționament corect, să ajungem la o concluzie adevărată. Dar aceasta este oare singura posibilitate?

Dacă notăm prin A o afirmație adevărată și prin F una falsă, atunci putem vorbi de următoarele patru posibilități:

1. $A \Rightarrow A$ („adevărat” implică „adevărat”)
2. $A \Rightarrow F$ („adevărat” implică „fals”)
3. $F \Rightarrow A$ („fals” implică „adevărat”)
4. $F \Rightarrow F$ („fals” implică „fals”).

În cazul unui raționament corect, numai trei dintre acestea se pot întâmpla: 1, 3 și 4. Așadar, $A \Rightarrow F$ nu are loc în nicio împrejurare. Putem afirma că „adevărul” implică numai „adevăr”, în timp ce „falsul” poate implica orice!

Într-adevăr, să luăm propoziția: „ $-1 = 1 \Rightarrow 0 = 2$ ”.

Ipoteza „ $-1 = 1$ ” este falsă și ea implică, prin operația corectă de a aduna +1 la ambii membri, o concluzie falsă.

În același timp, „ $-1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ ” prin operația de ridicare la pătrat ($F \Rightarrow A$).

Având în vedere aceste considerații logice, vom folosi calea corectă $A \Rightarrow A$, prin care, plecând de la ipoteze adevărate să ajungem numai la concluzii adevărate.

2. Teorema directă, teorema reciprocă, teorema contrară

Dacă vom considera propoziția „ $A \Rightarrow B$ ”, atunci propoziția „ $B \Rightarrow A$ ” se va numi *reciproca* celei dintâi, care astfel devine *propoziție directă*. Dacă propoziția directă este adevărată, acest lucru nu este obligatoriu și pentru propoziția reciprocă. Veridicitatea propoziției reciproce trebuie controlată de fiecare dată, ca și propoziția directă.

Dacă într-o afirmație sunt adevărate atât propoziția directă „ $A \Rightarrow B$ ”, cât și propoziția reciprocă „ $B \Rightarrow A$ ”, spunem că ipoteza și concluzia sunt *echivalente logic* (ceea ce înseamnă că sunt simultan false sau adevărate) și scriem „ $A \Leftrightarrow B$ ”. Invers, o „echivalență” se descompune în două implicații: „ $\Rightarrow$ ” și „ $\Leftarrow$ ”, iar pentru a demonstra că două afirmații sunt echivalente, va trebui să demonstrăm atât implicația directă cât și

reciproca. Enunțul unei echivalențe „ $A \Leftrightarrow B$ ” se întâlnește adesea în variantele:

- afirmația A este adevărată *dacă și numai dacă* B este adevărată;
- *condiția necesară și suficientă* ca A să fie adevărată este ca B să fie adevărată.

Implicația „ $A \Rightarrow B$ ” se mai numește *necesitatea* condiției. Implicația reciprocă „ $B \Rightarrow A$ ” se mai numește *suficiența* condiției.

Să luăm câteva exemple:

1. Să ne amintim definiția paralelogramului. Astfel, vom spune că *un patrulater cu laturile opuse paralele este paralelogram*. Să notăm această afirmație prin A. De asemenea, să notăm prin B proprietatea acelor patrulatere care au laturile opuse congruente, prin C proprietatea acelor patrulatere ale căror diagonale se taie în părți egale. Se poate demonstra pentru început că:

$$A \Leftrightarrow B, \text{ adică } (A \Rightarrow B \text{ și } B \Rightarrow A).$$

Astfel, implicația $A \Rightarrow B$ spune că: Dacă un patrulater este paralelogram, atunci laturile sale opuse sunt congruente sau, altfel spus, „o condiție *necesară* ca un patrulater să fie paralelogram este ca laturile sale opuse să fie congruente”. Acest fapt înseamnă că dacă un patrulater este paralelogram, atunci este obligatoriu (sau rezultă cu necesitate!) ca laturile sale opuse să fie congruente.

Implicația $B \Rightarrow A$ afirmă că: „Dacă într-un patrulater laturile sale opuse sunt congruente, atunci patrulaterul este paralelogram” (ceea ce înseamnă că are laturile opuse paralele). Faptul că un patrulater are laturile opuse congruente constituie o condiție *suficientă* ca patrulaterul să fie paralelogram.

Echivalența care reunește cele două implicații se va putea formula astfel:

„Un patrulater este paralelogram dacă și numai dacă are laturile opuse congruente” sau:

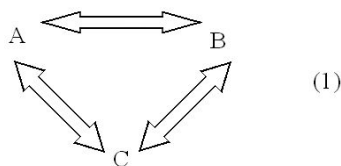
„O condiție necesară și suficientă ca un patrulater să fie paralelogram este să aibă laturile opuse congruente”.

(Am spus „o condiție...” deoarece în acest caz ca și în multe alte situații se pot găsi mai multe condiții necesare și suficiente).

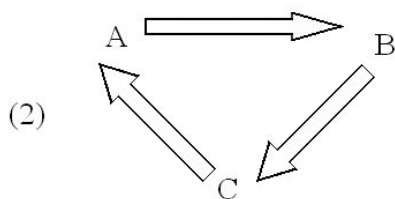
Se poate demonstra ușor că și condiția C (proprietatea patrulaterelelor ale căror diagonale se intersectează în părți egale) este echivalentă cu oricare din afirmațiile A sau B. Putem scrie:

$$A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C \text{ și } C \Leftrightarrow A.$$

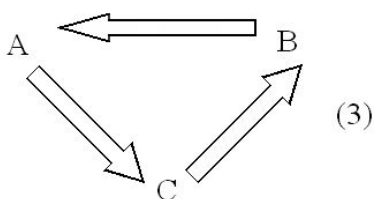
Acest lucru mai poate fi scris și astfel:



Aceste trei echivalențe care presupun 6 implicații, deci 6 demonstrații, pot reduce numărul demonstrațiilor la 3 prin simplificarea schemei (1) și reducerea acesteia la una din schemele (2) sau (3):



sau

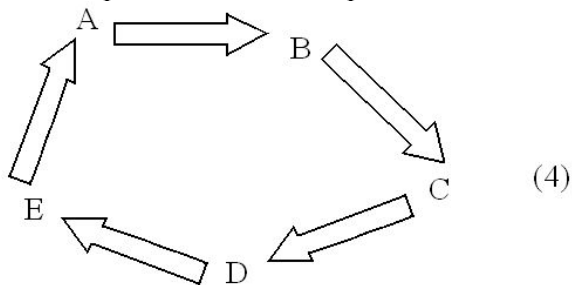


(Este important ca ordinea săgeților să închidă circuitul logic!)

Având în vedere că putem continua lanțul echivalențelor la paralelogram, de exemplu, dacă notăm prin D acele patrulatere care au unghiurile opuse congruente, prin E – patrulaterele care au proprietatea că au o pereche de laturi opuse paralele și congruente, etc., atunci putem continua schema logică astfel:

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D \Leftrightarrow E \text{ etc.},$$

care se poate demonstra printr-o schemă de tipul:



Dacă vom constata că un patrulater are o proprietate F și aceasta este echivalentă cu una (oricare!) din afirmațiile A, B, C, D, E, atunci ea devine automat echivalentă cu celelalte.

Să luăm, spre exemplu, drept proprietate F patrulaterele care au proprietatea centrului de simetrie. Vom spune că patrulaterul convex $MNPQ$ ale cărui diagonale se intersectează în O , are proprietatea F (a centrului de simetrie), dacă orice dreaptă dusă prin O este tăiată de laturile opuse în segmente congruente (conform fig. 1, $(OR) \equiv (OS)$).

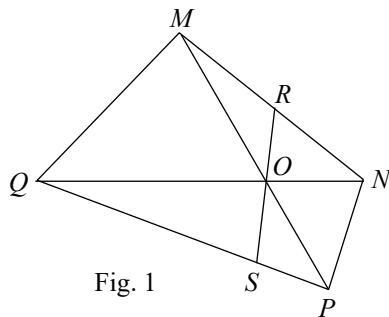
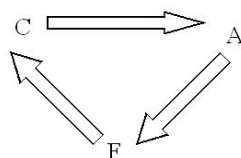


Fig. 1

În particular, vom spune că paralelogramul are această proprietate. Să arătăm că patrulaterele care au proprietatea F au și proprietatea D și reciproc. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $F \Leftrightarrow C$, de unde, ținând cont de schema (4), va rezulta și $F \Leftrightarrow D$.

Să demonstrăm mai întâi suficiența condiției, urmând schema logică de mai jos. Mai precis, avem de demonstrat implicația $C \Rightarrow F$, adică, dacă într-un patrulater diagonalele se taie în părți egale, el are și proprietatea F a centrului de simetrie, acest lucru realizându-se cel mai simplu după schema logică: $C \Rightarrow A \Rightarrow F$, adică un patrulater ale cărui diagonale se intersectează în părți egale rezultă paralelogram, și fiind paralelogram are proprietatea F a centrului de simetrie.

Să trecem acum la demonstrarea necesității condiției, adică avem de demonstrat implicația $F \Rightarrow C$. Ori acest lucru este imediat, dacă observăm că proprietatea C este un caz particular al lui F. Într-adevăr, proprietatea F afirmă că orice dreaptă dusă prin punctul O de intersecție al diagonalelor patrulaterului $MNPQ$ (fig. 1) este intersectată de laturile opuse în segmente congruente.



Dacă luăm ca drepte chiar diagonalele, va rezulta că acestea se taie în părți egale, deci s-a demonstrat că $F \Rightarrow C$. Schema logică alăturată arată că $F \Leftrightarrow C$.

3. Teorema contrară. Metoda reducerii la absurd (R.A.)

Să notăm prin $\bar{A}$ contrara afirmației A. De exemplu, dacă prin A înțelegem faptul că triunghiul MNP este isoscel, atunci $\bar{A}$ înseamnă faptul că triunghiul MNP nu este isoscel.

Mai general, dacă prin A înțelegem că o figură geometrică sau o mulțime are proprietatea (P), prin $\bar{A}$ vom nota faptul că figura sau mulțimea respectivă nu are proprietatea (P).

Data fiind o propoziție de tipul $A \Rightarrow B$, numită *propoziție directă*, acestea i se pot atașa alte trei tipuri de propoziții: *reciproca directei*, *contrara reciprocei* și *contrara directei*. Avem următoarele variante:

- a) $A \Rightarrow B$ (propoziție directă);
- b) $B \Rightarrow A$ (propoziție reciprocă);
- c) $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (propoziția contrara directei);
- d) $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (propoziția contrara reciprocei).

Între aceste patru propoziții înrudite există o strânsă legătură logică. Astfel, $A \Rightarrow B$ este echivalentă logic cu $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ și $B \Rightarrow A$ este echivalentă cu $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$. Vom avea astfel următoarele formule logice remarcabile:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) (\alpha)$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\bar{A} \Rightarrow \bar{B}) (\beta)$$

Într-adevăr, să arătăm mai întâi că $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$. Dacă prin absurd, $\bar{B} \not\Rightarrow \bar{A}$ (adică $\bar{B}$ nu implică $\bar{A}$, sau din faptul că $\bar{B}$ are loc, nu rezultă că are loc și $\bar{A}$), nu rămâne decât posibilitatea ca $\bar{B} \Rightarrow A$ (o a treia posibilitate neputând exista!). Dar, conform ipotezei, $A \Rightarrow B$. Am ajuns astfel la concluzia că sunt simultan adevărate și B și $\bar{B}$, fapt contradictoriu (deoarece o mulțime nu poate în același timp să aibă și să nu aibă proprietatea (P), ca de exemplu, un triunghi să fie și să nu fie în același timp isoscel), conform principiului *a treia posibilitate este exclusă!*

În mod asemănător se demonstrează și implicația:

$$(\bar{B} \Rightarrow \bar{A}) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Tot așa se demonstrează și echivalența logică (β).

Aceste relații (echivalențe logice), (α) și (β) sunt deosebit de utile în înțelegerea și desfășurarea raționamentului matematic riguros. Ele constituie o moștenire de neprețu-

it a gândirii și creației matematice a vechilor greci de acum 2500 de ani și sunt cunoscute și utilizate frecvent, fiind un instrument matematic deosebit de puternic, sub denumirea de **metoda reducerii la absurd (R.A.)**.

Această metodă s-a dovedit a fi unul din cele mai eficiente și subtile raționamente ale gândirii abstracte.

Vom arăta acest lucru, ceva mai încolo, printr-o serie de exemple.

4. Despre negație

Am văzut deja ce înseamnă să negăm o afirmație în matematică. Astfel, a nega afirmațiile: „Triunghiul ABC este isoscel”, „ $x < y$ ”, „ $x \leq y$ ”, „unghiul xOy este ascuțit”, etc. înseamnă a formula următoarele enunțuri corespunzătoare: „Triunghiul ABC nu este isoscel”, „ $x \geq y$ ”, „ $x > y$ ”, „unghiul xOy este drept sau obtuz”.

Practic, a nega o afirmație acolo unde avem de-a face cu cuantificatorii $\forall$ (oricare) și $\exists$ (există), la negare aceștia se transformă unul în celălalt (*oricare în există și invers!*), iar proprietatea enunțată (P) devine contrara acesteia.

Să luăm câteva exemple.

1) Mulțimea A este formată numai din numere pare. S-ar părea că negarea lui A înseamnă că vom avea de-a face numai cu numere ne-pare, deci impare, dar acest lucru este inexact!

Ca să ne dăm seama cum stau lucrurile, să reformulăm enunțul mulțimii A . Astfel, vom putea spune că mulțimea A este formată numai din numere pare, sau că *orice* element al mulțimii A este par. Atunci, prin $\bar{A}$ vom înțelege că *există* elemente din mulțime care nu sunt pare și deci nu faptul că toate elementele acesteia ar fi impare!

2) Dacă propoziția A afirmă că în orice triunghi dreptunghic are loc o anumită proprietate (P) și nimeni și nimic nu ne asigură că acea proprietate (P) este specifică numai triunghiurilor dreptunghice, atunci prin $\bar{A}$ trebuie să înțelegem că pot *exista* triunghiuri nedreptunghice care să nu aibă proprietatea (P).

5. Probleme cu... teoreme reciproce

La acest alineat vom da o serie de exerciții, care sunt aplicații la cele trecute în revistă mai sus. Să le urmărim cu atenție.

5.1. Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf

Enunț: Dacă două unghiuri congruente care au vârful comun, două laturi sunt în prelungire, iar celelalte două sunt de o parte și de alta a laturii comune, atunci ele sunt unghiuri opuse la vârf.

Demonstrație. (Prin metoda reducerii la absurd. R.A.)

Fie unghiurile $\sphericalangle AOx \equiv \sphericalangle BOy$, (Ox și (Oy în prelungire și să presupunem că (OA și (OB nu sunt în prelungire. Construim (OA' prelungirea lui (OA (vezi fig. 2). Unghiurile AOx și $\sphericalangle A'Oy$ sunt opuse la vârf, deci congruente. Urmează că unghiurile $A'Oy$ și BOy sunt congruente, ceea ce nu se poate decât dacă semidreptele (OB și (OA' coincid.

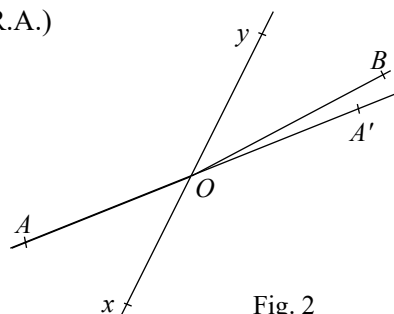


Fig. 2

5.2. Reciproca teoremei liniei mijlocii a trapezului

Enunț: Fie patrulaterul convex $ABCD$, E , F mijloacele laturilor opuse $[AD]$ și $[BC]$. Dacă $EF = \frac{AB + CD}{2}$, atunci $AB \parallel CD$, adică $ABCD$ este trapez.

Demonstrație (prin reducere la absurd):

Să presupunem că AB și CD nu sunt paralele.

Fie G mijlocul diagonalei $[BD]$. În triunghiul ABD , $[EG]$ este linie mijlocie, deci $EG \parallel AB$ și $EG = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Analog, $[FG]$ este linie mijlocie în triunghiul BDC . Urmează că $GF \parallel DC$ și $GF = \frac{1}{2} \cdot DC$. Așadar, avem:

$$EF = \frac{AB + CD}{2} = EG + FG > EF.$$

Contradicție! Această contradicție provine din presupunerea că $AB \nparallel CD$, care se dovedește a fi falsă. De aici rezultă că $AB \parallel CD$.

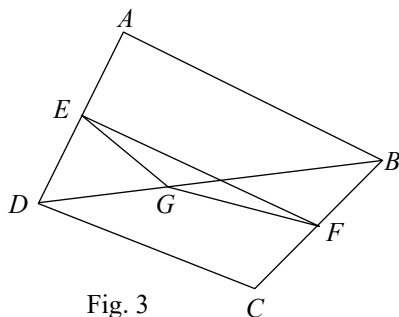


Fig. 3

5.3. O proprietate a mediane unui triunghi

Se știe că într-un triunghi dreptunghic, mediana care unește vârful unghiului drept cu mijlocul ipotenuzei este jumătate din ipotenuză.

Problema care se pune este dacă reciproca este adevărată și apoi ce se întâmplă în cazul când unghiul din al cărui vârf pleacă mediana este obtuz sau ascuțit. Mai precis, vom formula următoarea teoremă:

Teoremă: Fie ABC un triunghi și D mijlocul laturii $[BC]$. Atunci:

a) $AD = \frac{BC}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

b) $AD < \frac{BC}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) > 90^\circ$.

c) $AD > \frac{BC}{2} \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) < 90^\circ$.

Demonstrație:

Să demonstrăm mai întâi implicația „ $\Leftarrow$ ” din a) sau reciproca propoziției a) Fie ABC un triunghi dreptunghic și D mijlocul ipotenuzei. Paralelele prin B la AC și prin C la AB se intersectează în punctul E formând astfel dreptunghiul $ABCE$. Se știe însă că într-un dreptunghi diagonalele sunt congruente și se înjumătățesc. Așadar:

$$AD = \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot BC.$$

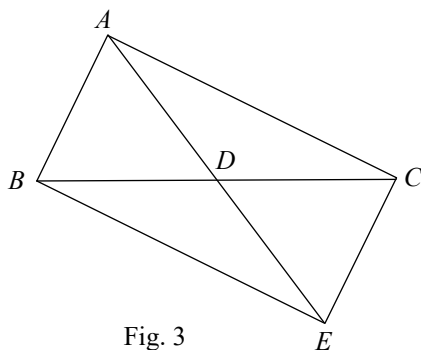


Fig. 3

Reciproc, dacă $AD = \frac{1}{2} \cdot BC$, adică:

$[AD] \equiv [BD] \equiv [DC]$, atunci triunghiurile

ABD și ADC sunt isoscele și

$m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle BAD) = \alpha$, iar

$m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle ACD) = \beta$.

Cum într-un triunghi suma măsurilor

unghiurilor este de 180° , rezultă că $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$,

adică $\alpha + \beta = m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. Echivalența de la punctul **a)** este demonstrată.

b) Să presupunem acum că $AD < \frac{BC}{2}$.

Luăm pe semidreapta $[DA]$ segmentul $[DA']$

astfel încât $[DA'] \equiv [DB] \equiv [DC]$. Conform

echivalenței de la punctul **a)**, rezultă că triun-

ghiul $BA'C$ este dreptunghic. Atunci avem:

$m(\sphericalangle BAD) > m(\sphericalangle BA'A)$ și

$m(\sphericalangle CAD) > m(\sphericalangle CA'A)$, deoarece unghiurile

BAD și CAD sunt unghiuri exterioare pentru triunghiurile BAA' și respectiv CAA' . Vom putea scrie:

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle CAD) > m(\sphericalangle BA'A) + m(\sphericalangle CA'A) = 90^\circ,$$

$$\text{deci } m(\sphericalangle A) > 90^\circ.$$

Înainte de a demonstra reciproca de la punctul **b)**, vom demonstra implicațiile directe de la punctul **c)**.

Fie, așadar, $AD > \frac{BC}{2}$. Luăm pe segmentul $[AD]$

punctul A' astfel încât $[A'D] \equiv [DB] \equiv [DC]$. Triunghiul $A'BC$ este dreptunghic datorită punctului **a)**. Atunci putem scrie:

$$90^\circ = m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle BA'D) + m(\sphericalangle CA'D) >$$

$$> m(\sphericalangle BAA') + m(\sphericalangle CAA') = m(\sphericalangle BAC).$$

Astfel, am arătat că

$$AD > \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) < 90^\circ.$$

Rămân de stabilit reciprocele de la punctele **b)** și **c)**. Reciproca de la punctul **b)** ar

însemna să arătăm că: „ $m(\sphericalangle A) > 90^\circ \Rightarrow AD < \frac{BC}{2}$ ”.

Vom folosi echivalența $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}))$.

Contrara afirmației „ $AD < \frac{BC}{2}$ ” înseamnă afirmația „ $AD \geq \frac{BC}{2}$ ”, iar contrara lui

„ $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$ ” înseamnă „ $m(\sphericalangle A) \leq 90^\circ$ ”. Așadar avem echivalența:

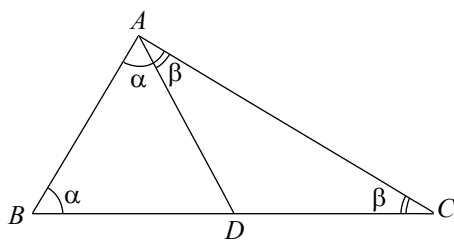


Fig. 5a

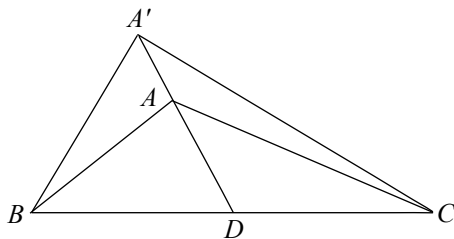


Fig. 5b

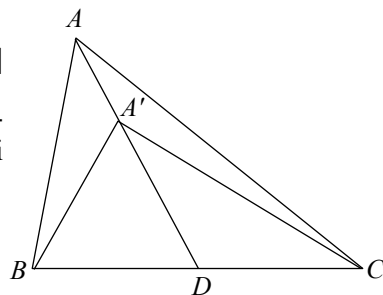


Fig. 6

$$\underbrace{\left((m(\sphericalangle A) > 90^\circ) \Rightarrow \left(AD < \frac{BC}{2} \right) \right)}_I \Leftrightarrow \underbrace{\left(AD \geq \frac{BC}{2} \Rightarrow (m(\sphericalangle A) \leq 90^\circ) \right)}_{II}.$$

Deci în loc să demonstrăm propoziția *I*, vom demonstra propoziția *II*.

Dar $AD \geq \frac{BC}{2}$ înseamnă două cazuri.

Dacă $AD = \frac{BC}{2}$, atunci, conform punctului **a**) rezultă $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

Dacă $AD > \frac{BC}{2}$, atunci, conform punctului **b**) rezultă $m(\sphericalangle A) < 90^\circ$.

În mod analog, vom demonstra reciproca de la punctul **c**).

$$\left((m(\sphericalangle A) < 90^\circ) \Rightarrow \left(AD > \frac{BC}{2} \right) \right) \Leftrightarrow \left(AD \leq \frac{BC}{2} \Rightarrow (m(\sphericalangle A) \geq 90^\circ) \right).$$

Dar $AD = \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, conform punctului **a**), iar $AD < \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) > 90^\circ$, conform punctului **b**).

Teorema este complet demonstrată.

5.4. Caracterizarea unui triunghi

Fie ABC un triunghi, iar a, b, c lungimile laturilor. Atunci avem:

a) $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) < 90^\circ$.

b) $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) = 90^\circ$.

c) $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow m(\sphericalangle A) > 90^\circ$.

Demonstrație: **Pasul 1.** Înscriem $\triangle ABC$ într-un semicerc de diametru $2R = a = BC$. Fie $AD \perp BC$ și fie $A' \in (DA, A'$ exterior cercului (v. **fig. 7a**).

Atunci avem $m(\sphericalangle BA'C) < 90^\circ$. De asemenea, în $\triangle A'CA$, $A'C = b' > b = AC$, pentru că $[A'C]$ se opune unghiului obtuz $A'AC$. Analog, în $\triangle A'BA$ avem: $A'B = c' > c = AB$. Deci

$$a^2 = b^2 + c^2 < b'^2 + c'^2.$$

Prin urmare, am demonstrat implicația „ $\Leftarrow$ ” din **a**), desigur în $\triangle A'BC$.

Pasul 2. Acum vom demonstra implicația „ $\Leftarrow$ ” din **c**).

Fie $A'' \in (DA)$. Atunci avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle CA''B) &= m(\sphericalangle CA''D) + m(\sphericalangle BA''D) > \\ &> m(\sphericalangle CAA'') + m(\sphericalangle BAA'') = 90^\circ. \end{aligned}$$

Prin urmare, folosindu-ne de relațiile evidente $A''B = c'' < c = AB$, în $\triangle A''BA$, și $A''C = b'' < b = AC$,

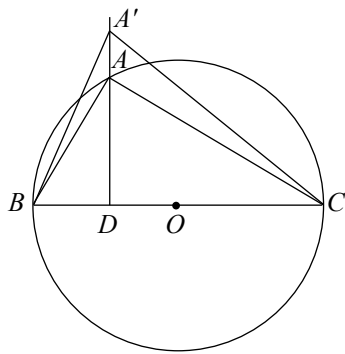


Fig. 7a

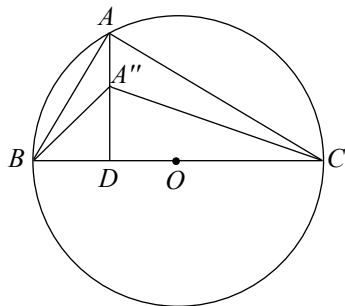


Fig. 7b

în $\Delta A''CA$, avem: $b''^2 + c''^2 < b^2 + c^2 = a^2$ și astfel implicația „ $\Leftarrow$ ” din c) este demonstrată.

Pasul 3. Acum vom demonstra implicația „ $\Rightarrow$ ” din a).

Presupunem prin absurd că implicația

a) „ $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow m(\sphericalangle A) < 90^\circ$ ” nu ar fi adevărată. Contrara acestei implicații revine la a presupune că este adevărată propoziția:

„ $m(\sphericalangle A) \geq 90^\circ \Rightarrow a^2 \geq b^2 + c^2$ ”.

Avem de analizat două cazuri:

Cazul 1. „ $m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Rightarrow a^2 \geq b^2 + c^2$ ” și tocmai am demonstrat că „ $m(\sphericalangle A) = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ ”, deci este adevărat.

Cazul 2. „ $m(\sphericalangle A) > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$ ”, ceea ce tocmai am demonstrat că este adevărat.

5.4. Un triunghi echilateral și un pătrat

Fie pătratul $ABCD$. Din D și C ducem semidreptele $[DE]$ și $[CE]$ care formează cu baza $[DC]$ unghiuri de 15° . Să se demonstreze că triunghiul ABE este echilateral.

Demonstrație: Pentru demonstrație vom folosi metoda reducerii la absurd. Așadar, să presupunem că triunghiul ABE nu este echilateral. Fie E' vârful triunghiului echilateral $AE'B$ de bază $[AB]$. Triunghiul $AE'D$ este isoscel de bază $[DE']$ cu $m(\sphericalangle DAE') = 30^\circ$. Atunci $m(\sphericalangle ADE) = 75^\circ$. Rezultă că $m(\sphericalangle E'DC) = 15^\circ$. Contradicție, deoarece și $m(\sphericalangle EDC) = 15^\circ$. Acest lucru arată că în mod necesar punctele E și E' coincid, ceea ce demonstrează că triunghiul ABE este echilateral.

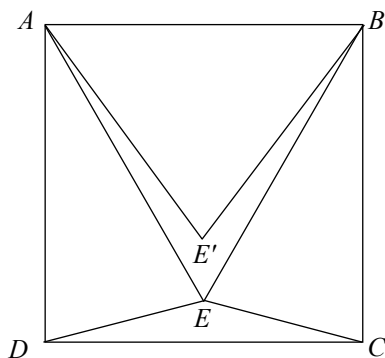


Fig. 8

5.5. Reciproca teoremei înălțimii

După cum știm, teorema înălțimii afirmă că într-un triunghi dreptunghic are loc relația:

$$AD^2 = BD \cdot DC \quad (*),$$

unde AD este înălțimea coborâtă din vârful unghiului drept A pe ipotenuză.

Problema care se pune este de a formula reciproca: dacă într-un triunghi are loc relația (*), rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic?

Acest lucru este posibil astfel:

Teoremă reciprocă. Dacă într-un triunghi ABC , cu înălțimea AD are loc relația $AD^2 = BD \cdot DC$, atunci triunghiul este dreptunghic.

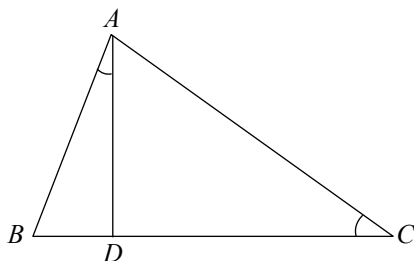


Fig. 9

Demonstrație: Într-adevăr, relația (*) se mai scrie $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{AD}$ și conform celui de-

al doilea criteriu de asemănare, rezultă că $\triangle ABD \sim \triangle ADC$, iar de aici $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ACD)$ și $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle DAC)$. Dar cum $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ACD) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$.

5.6. Reciproca teoremei catetei

Este binecunoscută și teorema catetei, care afirmă că într-un triunghi dreptunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și AD înălțime, au loc relațiile:

$$AB^2 = BD \cdot BC \text{ și } AC^2 = CD \cdot BC \quad (**)$$

corespunzătoare fiecărei catete în parte. Să formulăm reciproca astfel:

Teoremă reciprocă. Dacă într-un triunghi ABC cu înălțimea AD are loc una din cele două relații (**), atunci triunghiul este dreptunghic.

Demonstrație: Într-adevăr, să presupunem că are loc relația $AB^2 = BD \cdot BC$, care se mai scrie $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$, așadar $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (criteriul 2 de asemănare). De aici rezultă că $m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle ACB)$ și $m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle DAC)$. Dar $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ$, iar de aici rezultă că $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle BAD) + m(\sphericalangle DAC) = 90^\circ$, q.e.d.

Observație. Să constatăm că se mai poate formula o reciprocă a teoremei catetei și anume:

Reciproca 2. Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și pentru un punct $D \in (BC)$ are loc relația $AB^2 = BD \cdot BC$, atunci AD este înălțime.

Demonstrația se poate face imediat prin metoda reducerii la absurd (R.A.): Să presupunem că AD nu este înălțime, deci $AD \not\perp BC$. Ducem înălțimea $AE \perp BC$. Conform teoremei directe, are loc relația: $AB^2 = BE \cdot BC$, care împreună cu relația din ipoteză ne dă: $BD \cdot BC = BE \cdot BC$, de unde rezultă că $BE = BD$, cu D și $E \in (BC)$, de unde rezultă că $E = D$ și $AD \perp BC$.

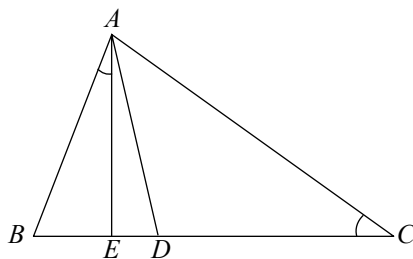


Fig. 10

Comentarii

1. A fost posibil să se formuleze două reciproce, deoarece ipoteza conține două condiții. Fixarea uneia poate implica pe cealaltă împreună cu concluzia, care devine astfel noua ipoteză.

2. Teorema înălțimii nu are a doua reciprocă. Într-adevăr, dacă ar avea, formularea ar fi următoarea:

„Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, pentru un punct $D \in (BC)$ are loc relația $AD^2 = BD \cdot CD$, atunci AD este înălțime”.

Așadar, trebuie văzut dacă ipotezele „ ABC triunghi dreptunghic” și relația „ $AD^2 = BD \cdot CD$ ” implică faptul că „ AD este înălțime”.

Ridicăm în D perpendiculara care intersectează prelungirea lui AB în A' și AC în H . Din asemănarea triunghiurilor HDC și $A'DB$, obținem:

$$\frac{HD}{BD} = \frac{DC}{A'D} \text{ sau}$$

$$A'D \cdot HD = BD \cdot DC. (1)$$

$$\text{Dar } BD \cdot DC = AD^2 \Rightarrow AD^2 = A'D \cdot HD \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{AD}{A'D} = \frac{HD}{AD} \Rightarrow \triangle ADH \sim \triangle ADA' \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\angle AA'D) = m(\angle DAH) \Rightarrow$ triunghiul ADC este isoscel și $[AD] \equiv [DC]$ și apoi $[AD] \equiv [BD]$, adică D este mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Deci un astfel de punct D , distinct de E , există și reciproca nu mai funcționează.

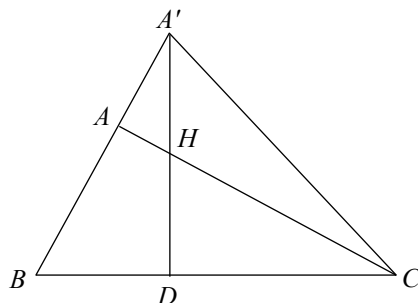


Fig. 11

Observații

1. Relația (1) poate fi privită ca o generalizare a teoremei înălțimii într-un triunghi oarecare. Într-adevăr, dacă $A' = A = H$, relația (1) devine: $AD^2 = BD \cdot DC$, adică tocmai teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

2. Se poate arăta că situația în care punctul D este mijlocul laturii $[BC]$, este singura excepție care invalidează a doua reciprocă a teoremei înălțimii. Dacă se pune condiția ca D să nu fie mijlocul lui $[BC]$, atunci reciproca 2 devine adevărată.

5.7. Reciproca teoremei lui Pitagora

Celebra teoremă a lui Pitagora este binecunoscută în triunghiul dreptunghic și ea afirmă că *pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor*. Să vedem dacă funcționează reciproca. Mai întâi să o formulăm.

Teoremă reciprocă. Dacă într-un triunghi ABC , are loc relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$, atunci triunghiul este dreptunghic în A .

Demonstrație: Într-adevăr, fie triunghi ABC și $AD \perp BC$. În plus, știm că:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 (2)$$

Relația (2) o putem scrie astfel:

$$AB^2 + AC^2 = (BD + DC)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BD^2 + 2 \cdot BD \cdot DC + DC^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - BD^2 + AC^2 - DC^2 = 2 \cdot BD \cdot DC.$$

Dar, aplicând teorema lui Pitagora (directă) în triunghiurile dreptunghice ABD și ADC , obținem:

$$AB^2 - BD^2 = AD^2 \text{ și } AC^2 - CD^2 = AD^2. \text{ De aici obținem } 2 \cdot AD^2 = 2 \cdot BD \cdot DC \text{ sau}$$

$$AD^2 = BD \cdot DC. (3)$$

Dar această relație arată, conform reciprocei teoremei înălțimii, că triunghiul ABC este dreptunghic în A .

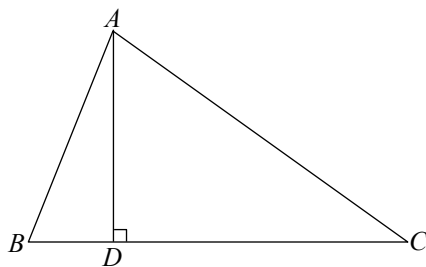


Fig. 12

8. Dreapta lui Simson

Teoremă. Fie ABC un triunghi și $\mathcal{C}$ cercul său circumscris. Dacă $M \in \mathcal{C}$ este un punct arbitrar pe cerc, atunci proiecțiile P, Q, R ale punctului M pe laturile AB, BC, CA sunt coliniare. Dreapta respectivă se va numi *dreapta lui Simson corespunzătoare punctului M* .

Demonstrație. Să constatăm că problema va fi rezolvată dacă vom arăta că unghiurile BQP și RQC sunt opuse la vârf, ceea ce ar conduce la coliniaritatea punctelor P, Q, R . Acest lucru se va face folosind reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf. Pentru aceasta, să urmărim unghiurile BQP și RQC . Patrulateralele $PBQM, MQRC$ și $ABMC$ sunt inscriptibile, după cum ușor se poate constata. Ca urmare, $m(\angle BQP) = m(\angle BMP)$, $m(\angle RQC) = m(\angle RMC)$. Dar unghiurile BMP și $RM C$ fac parte din triunghiurile dreptunghice BMP și $RM C$ și au complementele $\angle PBM, \angle RCM$ congruente, dat fiind că patrulaterul $ABMC$ este înscris în cercul $\mathcal{C}$ (aceste unghiuri au același suplement, anume $\angle ABM$). De aici rezultă că $m(\angle BQP) = m(\angle RQC)$ și problema este rezolvată.

Ne propunem acum problema existenței reciprocei.

Teoremă. Fie ABC un triunghi, $\mathcal{C}$ cercul său circumscris și M un punct în planul triunghiului cu proprietatea că proiecțiile lui M pe laturi sunt coliniare. Atunci $M \in \mathcal{C}$.

Demonstrația este imediată dacă se observă că în acest caz $\angle BQP \equiv \angle RQC$ și că patrulateralele $BQMP, MQRC$ sunt inscriptibile $\Rightarrow \angle BMP \equiv \angle RMC \Rightarrow \angle PBM \equiv \angle RCM$, deci $ABMC$ este inscriptibil, adică $M \in \mathcal{C}$.

9. Teorema lui Pitot

Fie patrulaterul circumscriptibil $ABCD$ (laturile sale sunt tangente la un cerc). Atunci are loc relația:

$$AB + CD = AD + BC.$$

Demonstrație. Fie E, F, G, H punctele de tangență ale laturilor AB, BC, CD, DA cu cercul $\mathcal{C}$. Au loc egalitățile: $[AE] \equiv [AH]$, $[BE] \equiv [BF]$, $[DG] \equiv [DH]$ și $[CG] \equiv [CF]$. Adunând aceste relații, se obține:

$$AE + BE + DG + CG = AH + BF + DH + CF,$$

care nu este altceva decât $AB + CD = AD + BC$.

Să formulăm teorema reciprocă:

Teoremă reciprocă:

Dacă patrulaterul convex $ABCD$ are proprietatea că $AB + CD = AD + BC$, atunci patrulaterul este circumscriptibil. Atunci $M \in \mathcal{C}$.

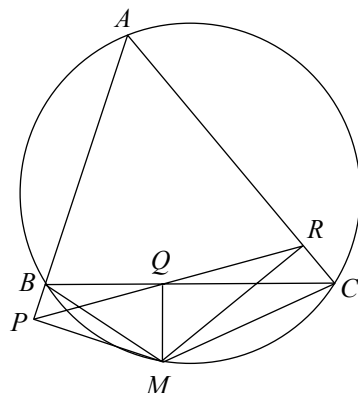


Fig. 13

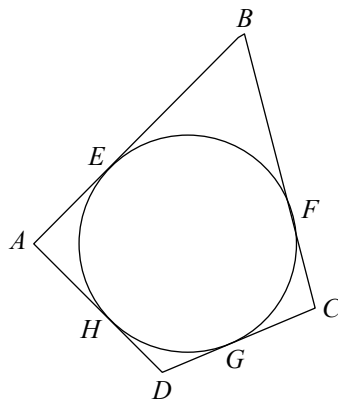


Fig. 14

Demonstrație (prin metoda reducerii la absurd). Să presupunem că patrulaterul $ABCD$ nu este circumscriptibil. Bisectoarele interioare ale unghiurilor A și B se intersectează în O , care va fi egal depărtat de laturile AD , AB și BC .

Fie $\odot$ cercul cu centrul O , tangent în P , M , N la laturile AD , AB , BC . Să presupunem că latura DC este exterioară cercului $\odot$ (cazul când DC este secantă cercului se tratează similar). Ducem paralela EF la DC , tangentă la cercul $\odot$.

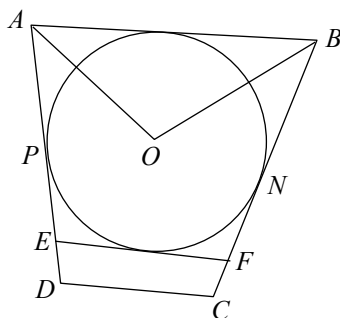


Fig. 15

Patrulaterul $ABFE$ este circumscriptibil, deci are loc relația $AB + EF = AE + BF$. Dar relația din ipoteză se va scrie:

$$AB + CD = AE + ED + BF + FC.$$

Scădem cele două relații și obținem:

$DC - EF = ED + FC$ sau $DC = ED + EF + FC$, adică o linie poligonală are aceeași lungime cu segmentul care o încheie, contradicție. Urmează că punctele D și E coincid, F cu C și deci $ABCD$ este circumscriptibil.

10. Unghiul format de coardă și tangentă

Unul din unghiurile importante în cerc este *unghiul format de o coardă și tangentă*, punctul de contact cu cercul fiind chiar vârful unghiului.

Se cunoaște măsura acestui unghi (vezi fig. 16):

$$m(\angle TAB) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\angle ACB),$$

unde C este un punct arbitrar pe cerc, iar unghiul ACB fiind un unghi înscris în cerc, având aceeași măsură ca și unghiul TAB , anume $\frac{1}{2}$ din măsura arcului AB).

Reciproca acestei proprietăți este adevărată și este imediată. Să vedem cum poate fi utilizată în probleme.

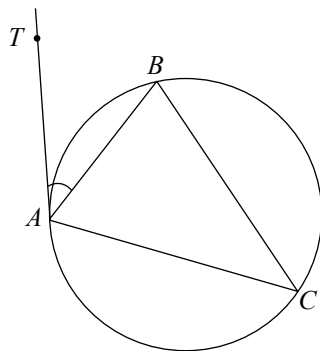


Fig. 16

Fie ABC un triunghi și AT o semidreaptă care formează cu AB unghiul TAB congruent cu unghiul ACB . Atunci AT este tangentă la cerc în punctul A . Se constată că în acest fel se obține o nouă metodă de a demonstra că o dreaptă este tangentă la un cerc.

11. O proprietate a dreptunghiului

Fie $ABCD$ un dreptunghi. Să se arate că pentru orice punct din planul dreptunghiului are loc relația:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2 \quad (1)$$

Reciproca este adevărată?

Demonstrație. Fie O intersecția diagonalelor dreptunghiului. În triunghiul MAC , MO este mediană. Relația metrică a medianei în acest triunghi ne dă:

$$MO^2 = \frac{2(MA^2 + MC^2) - AC^2}{4}.$$

Analog, în triunghiul MBD , MO este mediană și avem:

$$MO^2 = \frac{2(MB^2 + MD^2) - BD^2}{4}.$$

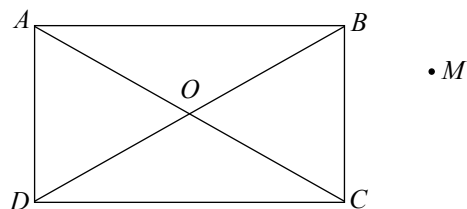


Fig. 17

Egalând și ținând cont că $BD = AC$, se obține relația (1).

Reciproca acestei propoziții, cum ar trebui formulată ?

Să încercăm astfel: *Dacă pentru orice punct M din plan are loc câte o astfel de relație de forma (1), atunci patrulaterul $ABCD$ devine dreptunghi.*

Demonstrație. Într-adevăr, să constatăm că de data aceasta ipoteza noastră este formată de fapt dintr-o infinitate de relații de tipul (1). Este evident că nu le vom utiliza pe toate. Le vom extrage pe acelea absolut necesar. Pentru aceasta, să luăm niște cazuri particulare.

Fie $M = A$. Atunci relația (1) devine: $AC^2 = AB^2 + AD^2$ (2)

Fie $M = C$. Atunci relația (1) devine: $CA^2 = CB^2 + CD^2$ (3)

Fie $M = B$. Atunci relația (1) devine: $BA^2 + BC^2 = BD^2$ (4)

și în fine, luând $M = D$, obținem: $DA^2 + DC^2 = DB^2$. (5)

Egalând relațiile (2) și (3), se obține: $AB^2 + AD^2 = CB^2 + CD^2$. (6)

Egalând apoi relațiile (4) și (5), se obține: $AB^2 + BC^2 = DA^2 + DC^2$. (7)

Adunând relațiile (6) cu (7), rezultă: $2AB^2 = 2DC^2 \Rightarrow AB = DC$. Înlocuim în (6) și obținem că: $AD = BC$.

Până acum rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram. Înlocuim în (2):

$$AC^2 = AB^2 + AD^2,$$

adică triunghiul ABC este dreptunghic în B , conform reciprocei teoremei lui Pitagora. Dar un paralelogram cu un unghi drept este dreptunghi. Cu aceasta problema este complet demonstrată.

Putem încheia această problemă, afirmând că proprietatea acelor patrulatere $ABCD$ care pentru orice punct M din plan are loc relația (1), este echivalentă cu definiția dreptunghiului (sau că este caracteristică numai pentru dreptunghi).

Concluzii care se desprind:

1. Fiecărei propoziții importante este util să-i controlăm existența și veridicitatea reciprocei.
2. Să stăpânim și să utilizăm cu atenție echivalențele logice și metoda reducerii la absurd.
3. Să învățăm să negăm corect enunțul unei propoziții sau afirmații.
4. Să căutăm și alte exemple similare.

SOLUȚII

ARITMETICĂ

1. Operații cu numere întregi și zecimale. Ordinea efectuării operațiilor. Sisteme de numerație

1. a) 420; b) 260; c) 132; d) 5; e) 7,5; f) 0,1; g) 1,7612; h) 110,01; i) 1; j) 1; k) 0; l) 1. 2. 69. 5. 25.
8. $2^3 + 2^2 \cdot 2 + 2^8 : 2^5 + 2^{10} : (4 \cdot 2^5) - 2^2 \cdot 2^3 = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^{10} : 2^7 - 4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^3 = 0$.

$$9. 0,069(4) = \frac{694-69}{9000} = \frac{625}{9000} = \frac{5^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = \frac{5}{72}. \text{ Deci } \frac{1}{0,069(4)} = \frac{72}{5} = 14,4.$$

10. $1\ 9\ 5\ 9 +$ 11. Este evident că vom avea: $4\ 6 \times$

$$\begin{array}{r} 4\ 1\ 2\ 7 \\ 6\ 0\ 8\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} \quad \quad \times \\ \quad \quad * \ * \\ \quad \quad * \ * \ 8 \\ \quad \quad * \ * \ * \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array}$$

cum însă $3 \times 6 = 18$ și $8 \times 6 = 48$, avem situațiile:

$$\begin{array}{r} 4\ 6 \times \\ \quad \quad * \ 8 \\ \hline 3\ 6\ 8 \\ * \ * \ * \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4\ 6 \times \\ \quad \quad * \ 8 \\ \hline 3\ 6\ 8 \\ * \ * \ 1 \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array}$$

dar acest lucru nu e posibil, deoarece 6^* este un număr par, deci nu se poate termina în cifra 1.

Rămâne că: $4\ 6 \times$ $4\ 6 \times$

$$\begin{array}{r} \quad \quad * \ 3 \\ \hline 1\ 3\ 8 \\ * \ * \ * \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \quad \quad * \ 3 \\ \hline 1\ 3\ 8 \\ * \ * \ 4 \\ \hline 1 \ * \ 7 \ 8 \end{array} \Rightarrow x = 4; 9$$

Se vede imediat că cifra 9 nu convine. Rămâne $x = 4$.

$$\begin{array}{r} 4\ 6 \times \\ \quad \quad 4\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 8 \\ 1\ 8\ 4 \\ \hline 1\ 9\ 7\ 8 \end{array}$$

12. Expresia $N_1 - N_2$ ia valoarea maximă atunci când N_1 ia cea mai mare valoare posibilă și N_2 ia cea mai mică valoare posibilă, în condițiile problemei. Acest lucru se întâmplă atunci când pentru N_1 avem pe prima coloană cifrele cele mai mari: 9, 8, 7 (indiferent de ordine), pe a doua coloană cifrele cele mai mari din cele rămase: 6, 5, 4 și pe ultima coloană: 3, 2, 1. Pentru N_2 situația este inversă. Astfel, cele două adunări arată astfel:

$$\begin{array}{r} 9\ 6\ 1 + \\ 8\ 5\ 2 \\ 7\ 4\ 3 \\ \hline 2\ 5\ 5\ 6 \end{array} \quad \text{și} \quad \begin{array}{r} 1\ 6\ 9 + \\ 2\ 5\ 8 \\ 3\ 4\ 7 \\ \hline 7\ 7\ 4 \end{array}$$

iar diferența $N_1 - N_2 = 2556 - 774 = 1782$.

13. $z \in \{0, 1, 2, 3\}$; $x \in \{6, 7, 8, 9\}$; $y \in \{7, 6, 5, 4\}$, deci numerele căutate vor fi: 6707; 7616; 8525 și 9434.

14. Se vede că $b = 5$. Atunci înmulțirea arată astfel:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 8 \ 5 \ 1 \ 8 \ 4 \times \\ \hline a \ 5 \\ 5 \ 9 \ 2 \ 5 \ 9 \ 2 \ 0 \\ * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \\ \hline c \ c \ c \ c \ c \ c \ 0 \ 0 \end{array}$$

cum ultima steluță trebuie să fie 8, rezultă că $a = 2$ sau $a = 7$. Făcând calculele, verifică numai $a = 7$. Așadar:

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 8 \ 5 \ 1 \ 8 \ 4 \times \\ \hline 7 \ 5 \\ 5 \ 9 \ 2 \ 5 \ 9 \ 2 \ 0 \\ 8 \ 2 \ 9 \ 6 \ 2 \ 8 \ 8 \\ \hline 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 0 \ 0 \end{array}$$

15. Aceste numere sunt: 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87, 97 în total 18 numere.

16. Observăm că $18906 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 137 = 137 \cdot 138$.

17. Avem $483 = 21 \cdot 23$.

18. Fie a, b, c cele trei numere. Atunci $a + b + c = 60$, $b + c = 2a$, de unde: $3a = 60$, $a = 20$ și $b + c = 40$. Apoi $b = c - a$, $b = c - 20$, $c = b + 20$, $2b + 20 = 40$, $b = 10$.

19. Fie numerele pare consecutive: $2n - 2, 2n, 2n + 2$. Atunci $(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 744$, $6n = 744$, $2n = 248$. Deci numerele vor fi: 246, 248, 250.

20. a) Fie $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 9$ cele 10 numere consecutive. Avem: $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 9) = 235$; $10n + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 235 \Leftrightarrow 10n + 45 = 235 \Leftrightarrow 10n = 190 \Leftrightarrow n = 19$. Așadar, numerele sunt: 19, 20, 21, ..., 28; b) În mod analog, numerele pare consecutive vor fi: $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, 2n + 8, 2n + 10, 2n + 12$. Suma lor: $14n + 42 = 112 \Leftrightarrow 14n = 70 \Rightarrow n = 5$. Deci numerele sunt: 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.

21. Să observăm mai întâi că $576 = 24^2 = (2^3 \cdot 3)^2 = 2^6 \cdot 3^2$. Numărul perechilor cerute este teoretic egal cu numărul divizorilor lui 576. Acesta este: $(6 + 1)(2 + 1) = 7 \cdot 3 = 21$. Deci perechile de soluții vor fi (având în vedere că nu facem distincție între perechile (a, b) și (b, a) cu $ab = 576$): (1, 576); (2, 288); (4, 144); (8, 72); (16, 36); (32, 18); (64, 9); (3, 192); (6, 96); (12, 48); (24, 24).

22. $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1$.

23. Notând cu x împărțitorul, avem $x = \frac{1042 - 6}{7} = \frac{1036}{7} = 148$.

24. Se știe că $a = bq + r$, unde q este câtul și r restul, deci $a = 15b + 64$ sau $a - b = 14b + 64$, unde $a - b$ este diferența dintre deîmpărțit și împărțitor și deci $1436 = 14b + 64$, deci $b = \frac{1436 - 64}{14}$, $b = 98$, $a = 1534$.

25. Grupăm termenii astfel: $1 + 2 + \dots + 1976 = (1 + 1976) + (2 + 1975) + \dots + (988 + 989) = 1977 + \dots + 1977 = 988 \cdot 1977$; atunci $N = 1977 + 2 \cdot 988 \cdot 1977 = 1977(1 + 2 \cdot 988) = 1977(1 + 1976) = 1977^2$.

26. Numărul se poate scrie: $\frac{a(100a + 10a + a)}{148} = \frac{111 \cdot a^2}{148} = \frac{37 \cdot 3a^2}{37 \cdot 4} = \frac{3a^2}{4}$. De aici se vede că a trebuie să fie număr par. Deci $a = 2, 4, 6, 8$.

$$27. \overline{a4} \cdot \overline{a6} + 1 = (10a + 4)(10a + 6) + 1 = 100a^2 + 100a + 25 = [5(2a + 1)]^2.$$

28. Avem: $\overline{ab} \cdot \overline{ac} = 3906$. Se vede imediat că $a = 6$. Apoi $b = 2$ și $c = 3$.

$$29. \text{Avem } 0,1(11)_3 = \frac{111_3 - 1_3}{220_3} = \frac{1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1 - 1}{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}. \text{ Analog } 0,2(22)_4 = \frac{222_4 - 2_4}{330_4} = \frac{2}{3}. \text{ Deci}$$

$$\frac{0,1(11)_3}{0,2(22)_4} = \frac{3}{4}. \text{ La fel se arată și cealaltă egalitate.}$$

$$30. x = 400.$$

$$31. S_1 = (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) = 0; S_2 = (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \dots + (-1991 + 1992) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{996 \text{ ori}} = 996; S_3 = (-2 + 4) + (-6 + 8) + \dots + (-1990 + 1992) =$$

$$= \underbrace{2+2+\dots+2}_{498 \text{ ori}} = 996.$$

$$32. \{81, 82, \dots, 129\}.$$

$$33. \text{Avem două cazuri: 1) } n \text{ impar, } n = 2p + 1, \text{ atunci: } N = \frac{2(2p+1)-1+3(-1)^{2p}}{4} = \frac{4p+4}{4} =$$

$$= p + 1 \in \mathbb{Z}; 2) n \text{ par, } n = 2p, \text{ atunci: } N = \frac{2 \cdot 2p - 1 + 3(-1)^{2p-1}}{4} = \frac{4p-4}{4} = p-1 \in \mathbb{Z}.$$

$$34. a = 8.$$

$$35. \text{Într-adevăr, } N = \overline{66\dots6} = 6(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1) = \frac{6(10^{n+1} - 1)}{9} = \frac{2(10^{n+1} - 1)}{3}, \text{ în care}$$

factorul 2 intră numai la puterea întâi, $10^{n+1} - 1$ fiind impar; acest lucru ne arată că numerele de această formă nu pot fi pătrate perfecte.

$$36. \overline{abc} = 5 \cdot \overline{bc} + a \Leftrightarrow 100a + \overline{bc} = 5\overline{bc} + a \Leftrightarrow 100a = 4\overline{bc} + a \Leftrightarrow 99a = 4\overline{bc} \Leftrightarrow a = 4, \overline{bc} = 99. \text{ Deci } \overline{abc} = 499.$$

$$37. A = 3^{183} = (3^3)^{61} = 27^{61}, \text{ iar } B = 2^{305}(2^2 - 2 - 1) = 2^{305} = (2^5)^{61} = 32^{61} \text{ și deci } B > A.$$

$$38. \text{Transformăm: } 0,xy(z2) = \frac{\overline{xyz2} - \overline{xy}}{9900} = \frac{\overline{xyz2} - \overline{xy}}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11} = \frac{49}{11 \cdot 2^2 \cdot 3} = \frac{49 \cdot 75}{9900} = \frac{3675}{9900}; \text{ urmează}$$

deci să reconstituim scăderea:

$$\begin{array}{r} x \quad y \quad z \quad 2 - \\ \underline{x \quad y} \\ 3 \quad 6 \quad 7 \quad 5 \end{array} \quad \text{sau adunarea} \quad \begin{array}{r} 3 \quad 6 \quad 7 \quad 5 + \\ \underline{x \quad y} \\ x \quad y \quad z \quad 2 \end{array}$$

de unde se observă că $y = 7$ și $x = 3$, deci:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 6 \quad 7 \quad 5 + \\ \underline{3 \quad 7} \\ 3 \quad 7 \quad 1 \quad 2, \end{array}$$

de unde $z = 1$.

39. Vom putea scrie: $x = y(x - 1)$, de unde se observă o primă soluție: $x = y = 0$. Dacă $x, y \neq 0$, vedem că $x - 1$ este un divizor al lui x , lucru care nu se poate decât dacă $x - 1 = 1$, de unde rezultă $x = 2$ și apoi $y = 2$.

40. Din enunț: $x + y = x^3 \Rightarrow y = x^3 - x = (x - 1)x(x + 1)$; a) Dacă $y = 0 \Rightarrow (x - 1)x(x + 1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$; b) $y = (x - 1)x(x + 1)$ este produsul a trei numere consecutive, deci divizibil prin 3 și cum din acestea cel puțin unul este par, rezultă că y este divizibil prin 6.

41. Presupunem că fiecare robinet ar avea debitul de 200 ℓ/h ; atunci într-o oră vor curge 1800 ℓ ; deci pentru umplerea bazinului ar mai fi necesară cantitatea de 176 ℓ care reprezintă suplimentul de apă oferit de robinetele mai mari. Întrucât diferența dintre debitele robinetelor este de

$244 - 200 = 44$ ℓ pe oră, atunci cei 176 litri vor curge în bazin prin $176 : 44 = 4$ robinete. Avem astfel 4 robinete de 244 ℓ/h și 5 robinete de 200 ℓ/h.

42. 10 sticle de 1 litru; 100 sticle de $1/2$ litri; 400 sticle de $1/4$ litri.

43. Dacă x elevi au luat bilete de 7 lei și y de 13 lei, atunci $7x + 13y = 143 \Leftrightarrow 7x = 13(11 - y)$, deci x este divizibil prin 13 $\Rightarrow x = 13t$ ($t \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 7 \cdot 13t = 13(11 - y) \Rightarrow 7t = 11 - y$; $7t + y = 11 \Rightarrow t = 1$ și deci $y = 4$, adică $x = 13$, $y = 4$.

44. Dacă a și b sunt dimensiunile dreptunghiului, atunci $2a + 2b = 84$, adică $a + b = 42$ și $(a + 6)(b - 6) = ab \Leftrightarrow b - 6 = a$, de unde $2b = 48$, $b = 24$ m și $a = 42 - 24 = 18$ m.

45. Dacă toate trei au împreună 200 lei, iar ultimele două 190 lei înseamnă că prima persoană are $200 - 190 = 10$ lei. În continuare, rezultă că ultima va avea $200 - 110 = 90$ lei. Așadar, a doua va avea: $200 - 10 - 90 = 100$ lei.

46. Fie x, y, z cele trei numere și u numărul care se scade din fiecare. Atunci $x - u = 15$; $y - u = 132$; $z - u = 346$. Adunând cele trei relații obținem: $x + y + z = 493 + 3u$ sau $1015 - 3u = 493 \Rightarrow u = \frac{1015 - 493}{3} = 174$. Deci: $x - 174 = 15 \Rightarrow x = 189$; $y - 174 = 132 \Rightarrow y = 306$; $z - 174 = 346 \Rightarrow z = 520$.

47. Dacă toate timbrele ar fi fost de 3 lei bucata, atunci ele ar fi costat $14 \cdot 3 = 42$ lei. Diferența de $50 - 42 = 8$ lei provine din diferența de preț $5 - 3 = 2$ lei. Deci au fost $8 : 2 = 4$ timbre de 5 lei și $14 - 4 = 10$ timbre de 3 lei.

2. Divizibilitatea numerelor. Numere prime. Descompunerea în factori.

C.M.M.D.C., C.M.M.M.C. a două sau mai multe numere. Probleme

1. 150 și 42.

2. 150 și 42 sau 1050 și 6.

4. $1386 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Rezultă că numărul mai mic conține ca factor pe $2 \cdot 3$, iar numărul mai mare pe 11. Ceilalți divizori $3 \cdot 7$ sunt comuni. Rezultă că cele două numere căutate sunt: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$ și $11 \cdot 3 \cdot 7 = 231$.

5. Numărul poate fi scris: $1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b)$. Trebuie ca $10a + b$ să fie prim și cât mai mare. Cel mai mare număr prim de două cifre este 97. R: 9797.

6. Dacă un număr N se descompune în factori primi astfel: $N = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta \cdot p_3^\gamma$, atunci numărul divizorilor săi va fi: n.d. $= (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$. Atunci: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, n.d. $= 4 \cdot 3 = 12$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$, n.d. $= 3 \cdot 3 = 9$; $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; n.d. $= 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$; $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; n.d. $= 4 \cdot 4 = 16$.

7. Numărul se descompune astfel: $18906 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 137 = 138 \cdot 137$, deci cele două numere consecutive sunt: 137, 138.

8. Descompunem produsul lor în factori primi și obținem: $793800 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Pe de altă parte, conform enunțului, dacă x, y, z sunt cele trei numere avem: $5x = 7y = 9z = A$. Obținem $5x \cdot 7y \cdot 9z = A^3$ sau $5 \cdot 7 \cdot 9(xyz) = A^3$, adică $A^3 = 2^3 \cdot 9^3 \cdot 7^3 \cdot 5^3$, de unde: $A = 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5$. Dar $5x = 7y = 9z = 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5$ și obținem $x = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126$; $y = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$; $z = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$.

9. $0,5(6) = \frac{17}{30}$. Pe de altă parte, $a = 500a_1$; $b = 500b_1$, cu $(a_1, b_1) = 1$, deci $a = 500 \cdot 17 = 8500$

și $b = 30 \cdot 500 = 15000$.

10. a) Avem: $n^2 - n = 1332 \Leftrightarrow n(n - 1) = 36 \cdot 37 \Leftrightarrow n = 37$; b) $n(n + 1)(n + 2) = 5814 \Leftrightarrow n(n + 1)(n + 2) = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Rightarrow n = 17$, $n + 1 = 18$; $n + 2 = 19$.

11. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 5, 6, 12, 15 este 60. Singurul număr, multiplu de

60, cuprins între 270 și 350 este 300. Deci la competiție au participat 300 elevi.

12. Fie $\overline{abc}$ un astfel de număr. Suma tuturor numerelor de această formă va fi:

$S = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222(a + b + c) = 2(a + b + c) \cdot 111$, care este multiplu de 111.

13. Avem $a + b = 455$ și $a = b \cdot 15 + 23$ sau $a + b = 16b + 23 \Leftrightarrow 455 = 16b + 23$, de unde $b = \frac{455 - 23}{16} = 27$, $a = 428$.

14. 30; 256.

15. Să observăm mai întâi că $4851000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ și $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Dacă cele două numere sunt a și b , iar d este cel mai mare divizor comun al lor, atunci: $a = a_1 d = a_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $b = b_1 d = b_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $ab = a_1 b_1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \Rightarrow a_1 b_1 = 2 \cdot 5 \cdot 11$. Pe de altă parte:

$\frac{a}{b} = \frac{a_1 \cdot d}{b_1 \cdot d} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{10}{11}$ rezultă $a_1 b_1 = 2 \cdot 5 \cdot 11$, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{10}{11}$ pe care le înmulțim și avem: $a_1^2 = 10^2$,

$a_1 = 10$. Deci $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ și $b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

16. Într-adevăr $E = 10^n - 1 + 18 = \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ ori}} + 9 \cdot 2 =$ multiplu de 9. **17.** Avem: $n - 2 \mid 81$ și

$11 \cdot 13 \cdot 17 =$ multiplu de $(n + 2)$. De aici rezultă $n - 2 = 9 \Rightarrow n = 11$ și $n + 2 = 13$.

18. Avem $(\overline{abcd} + \overline{dcba})^2 = (1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a)^2 = (1001a + 110b + 110c + 1001d)^2 = [11(91a + 10b + 10c + 91d)]^2 =$ multiplu de $11^2 =$ multiplu de 121.

19. Fie x și y cele două numere. Atunci $x^2 - y^2 = 1805$ sau $(x - y)(x + y) = 5 \cdot 19^2$. Dar $x = 19x_1$, $y = 19y_1$, $(x_1, y_1) = 1$. Deci $(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = 5 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = 1$, $x_1 + y_1 = 5 \Rightarrow x_1 = 3$; $y_1 = 2$. De aici rezultă $x = 3 \cdot 19 = 57$; $y = 2 \cdot 19 = 38$.

20. Să remarcăm că $3a + 5b + 17(5a + b) = 5(4a + b) =$ multiplu de 17, de unde rezultă că $4a + b$ se divide cu 17.

21. $\overline{abab} - \overline{baba} = 1000(a - b) + 100(b - a) + 10(a - b) + b - a = (a - b)(1000 - 100 + 10 - 1) = 909(a - b)$.

22. Deoarece $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$, $N = 53^m + 53^n + 1 = (4 \cdot 13 + 1)^m + (4 \cdot 13 + 1)^n + 1 = (4 \cdot 13 + 1)^m - 1 + (4 \cdot 13 + 1)^n - 1 + 3 = 4 \cdot 13(53^{m-1} + 53^{m-2} + \dots + 1) + 4 \cdot 13(53^{n-1} + \dots + 1) + 3 =$ multiplu de 13 + 3. Așadar restul este 3.

23. Într-adevăr, $N = 5^n(5^2 + 5 + 1) = 31 \cdot 5^n$.

24. Într-adevăr, din relația dată deducem: $3b = 2(a + 2c)$, relație care ne arată că b este divizibil prin 2. Fie $b = 2b'$, $b' \in \mathbb{Z}$. Atunci $N = 2b' \cdot \frac{3(b - 2c)}{2} = 3b'(2b' - 2c) = 6b'(b' - c)$, de unde se observă că $N \vdots 6$.

25. $N = 6^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = 6^n + 6^n \cdot 3 + 6^n \cdot 9 = 6^n(1 + 3 + 9) = 6^n \cdot 13 =$ multiplu de 13.

26. Fie $x = n - 1$; $y = n$; $z = n + 1$. Atunci $\overline{xy} = z + 19 \Leftrightarrow 10(n - 1) + n = n + 1 + 19 \Leftrightarrow 10n = 30 \Rightarrow n = 3$. Deci $\overline{xyz} = 234 = 13 \cdot 18$.

27. Într-adevăr, $7^{n+2} \cdot 11^{n+1} + 539 = 7^2 \cdot 7^n \cdot 11^n \cdot 11 + 539 = 539 \cdot 7^n + 539 = 539(7^n + 1) =$ multiplu de $539 \cdot 2 =$ multiplu de 1078, deoarece $7^n \cdot 11^n + 1$ este număr par, ca sumă de două numere impare.

28. Suma cifrelor acestui număr este 9 și, în plus, E este un număr par, deci E se divide cu 18.

29. $N = 3^{40} - 2^{40} = 9^{20} - 4^{20} = 81^{10} - 16^{10}$. Dacă observăm că 81^{10} se termină în cifra 1, în timp

ce numărul 16^{10} se termină în cifra 6, putem deduce că numărul N se termină în cifra 5, deci va fi divizibil prin 5.

30. Fie a numărul și q câtul prin împărțire la 72. Avem deci $a = 72q + 68 = 3 \cdot 24q + 68 = 24(3q) + 2 \cdot 24 + 20 = 24(3q + 2) + 20$. Deci restul prin împărțire la 24 va fi 20, iar câtul $3q + 2$.

31. Într-adevăr, dacă numerele sunt x, y, z , atunci: $xy = 287, yz = 154 \Rightarrow \frac{xy}{yz} = \frac{287}{154} = \frac{7 \cdot 41}{7 \cdot 22}$. În

prima fracție se simplifică prin y , iar în ultima prin 7. Deci $y = 7, x = 41, z = 22$.

32. Relația dată se scrie astfel: $100c + 10b + a - 100a - 10b - c = 297$ sau $99(c - a) = 297 \Rightarrow c - a = 3, c = a + 3$. Deci perechea (a, c) poate lua valorile: $(0, 3); (1, 4); (2, 5), \dots, (6, 9)$, care corespund numerelor: $\overline{b3}, \overline{1b4}, \overline{2b5}, \overline{3b6}, \overline{4b7}, \overline{5b8}, \overline{6b9}$. Dintre acestea, divizibil la 5 nu poate fi decât $\overline{2b5}$. Ca să fie divizibil și la 3, trebuie ca $2 + b + 5 =$ multiplu de 3, deci: $b = 2, 5, 8$. Numerele căutate vor fi: 225, 255, 285.

33. Fie a și b două numere. Avem $a = b \cdot 50 + 13$, pe de altă parte: $a - 10b = 1173$. De aici $1173 + 10b = 50b + 13$ sau $1173 = 40b + 13 \Leftrightarrow b = \frac{1173-13}{40} = 29$. Atunci $a = 1173 + 10b = 1173 + 290 = 1463$.

34. Într-adevăr $a^5 \cdot b^5 = (ab)^5$. Pe de altă parte, numerele care la puterea a 5-a au patru cifre sunt: $4^5 = 1024; 5^5 = 3125; 6^5 = 7776$. Numărul cerut este $7776 = 6^5 = 2^5 \cdot 3^5$.

35. $N = n^8 + 4 = n^8 + 4n^4 + 4 - 4n^4 = (n^4 + 2)^2 - 4n^4 = (n^4 - 2n^2 + 2)(n^4 + 2n^2 + 2)$. Întrucât $n^4 + 2n^2 + 2 > 2$, N nu poate fi prim decât dacă $n^4 - 2n^2 + 2 = \pm 1$. Dar $n^4 - 2n^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow (n^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow n = \pm 1$. În aceste cazuri $N = 5$. Cazul $n^4 - 2n^2 + 2 = -1$ nu convine.

36. Pentru ca numărul $\overline{2x}$ să fie divizibil prin 5, x trebuie să fie 0 sau 5. Pentru $x = 0 \Rightarrow y \in \{1, 3, 7, 9\}$, iar pentru $x = 5 \Rightarrow y \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Așadar există în total 12 fracții ireductibile cu condițiile date.

37. $N = (9 \cdot 64 + 27 \cdot 16) \cdot 3^9 \cdot 4^9 = 16(3 \cdot 4)^9(36 + 27) = 16(3 \cdot 4)^9 \cdot 63 =$ multiplu de 63.

3. Frații ordinare. Compararea fracțiilor. Operații cu fracții. Frații zecimale finite și periodice. Probleme

1. c) $1\frac{17}{55}$; d) $3\frac{55}{57}$. 2. a) $x = \frac{1}{3}$; b) $x = 5$; c) $x = 25$. 3. b) $x = \frac{9}{8}$. 4. a) 11; b) 250; c) 4; d) 5.

5. a) 3; b) $2\frac{3}{80}$; c) 10; d) 1; e) 1320. 8. 3. 10. Observăm că: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$

$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}; \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}; \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}; \frac{1}{7 \cdot 8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$, de unde $A = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

11. 75. 12. $3\frac{1}{2}$. 13. 0. 14. $x = 30$. 15. $x = \frac{24}{5}$. 16. $\frac{30}{7}$. 17. $\frac{1}{8}$. 18. $x = -138$.

19. a) Aducem la același numitor și vom avea: $\frac{36}{60} < \frac{5n}{60} < \frac{56}{60} \Leftrightarrow 36 < 5n < 56 \Rightarrow n \in \{8, 9,$

$10, 11\}$; b) Inegalitățile se mai pot scrie: $\frac{12}{7} < \frac{n}{6} < \frac{29}{14} \Leftrightarrow 72 < 7n < 87 \Rightarrow n \in \{11, 12\}$.

20. a) Aducem la același numitor fracțiile: $\frac{21}{35} > \frac{x+1}{35} > \frac{15}{35} \Leftrightarrow 21 > x+1 > 15 \Leftrightarrow 20 > x > 14$,

deci $x \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$; b) $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{5} < \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{70}{105} < \frac{21(x+1)}{105} < \frac{75}{100} \Leftrightarrow 70 < 21x+21 < 75 \Leftrightarrow 49 < 21x < 54$ și $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \emptyset$.

21. $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, deci $\frac{1}{6}$ din drum reprezintă 8 km. Tot drumul va avea $8 \cdot 6 = 48$ km.

22. Avem $\frac{\overline{ab}}{ba} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{10a+b}{10b+a} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9(a-b)}{11(a+b)} = \frac{7}{11} \Leftrightarrow 9(a-b) = 7(a+b) \Leftrightarrow 2a = 16b \Leftrightarrow a = 8b \Rightarrow a = 8, b = 1$. Deci $\overline{ab} = 81$.

23. Se observă că $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, iar $3 + 5 + 7 = 15$, deci fracțiile sunt: $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}$.

24. Ipoteza $A < B$ este echivalentă cu: $\frac{1}{1988} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1988} \right) < \frac{1}{1987} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1987} \right) \Leftrightarrow 1987 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1988} \right) < 1988 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1987} \right) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1987} - \frac{1987}{1988} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1987} + \frac{1}{1988} > 0$, evident. Deci ipoteza $A < B$ este adevărată.

25. În prima zi a arat $\frac{1}{2} + 5$ ha. În ziua a doua $\frac{1}{4} - 2,5$ ha. În ziua a treia $\frac{1}{4} - 2,5$ ha, care reprezintă 25 ha sau $\frac{1}{4}$ din suprafață reprezintă 27,5 ha. Deci suprafața totală este de $27,5 \cdot 4 = 110$ ha. Așadar, în ziua I brigada a arat $55 + 5 = 60$ ha. A doua zi: $\frac{55}{2} - 2,5 = 27,5 - 2,5 = 25$ ha, iar în ziua a treia tot 25 ha.

26. Într-adevăr, diferența dintre jumătatea sa și sfertul său reprezintă: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ din număr, iar diferența dintre treimea sa și șesimea sa: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ din număr. În același timp, diferența dintre sfertul său și șesimea sa reprezintă 24 de unități, adică: $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ din număr reprezintă 24, adică numărul va fi: $N = 24 \cdot 12 = 288$.

27. Dacă au strâns $\frac{3}{5}$ din cantitate, aceasta reprezintă $\frac{3}{5} \cdot 70 = 3 \cdot 14 = 42$ kg. Deci au mai rămas: $70 - 42 = 28$ kg.

28. Din enunț, trebuie ca: $\frac{1}{6} < \frac{a}{112} < \frac{1}{5}$ sau dacă aducem la același numitor: $\frac{280}{N} < \frac{15a}{N} < \frac{336}{N}$, unde $N = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. De aici rezultă $a \in \{18, 19, 20, 21, 22\}$. Dintre acestea, singura fracție ireductibilă va fi: $\frac{19}{112}$.

29. Fie $\frac{a}{x}$ și $\frac{a}{y}$ cele două fracții. Avem $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{a(x+y)}{xy} = \frac{11}{10}$. Apoi $\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{7}{2} \Rightarrow \Rightarrow \frac{7a}{2x} = \frac{11}{10} \Leftrightarrow 35a = 11x; x = 35; a = 11; y = 14$.

30. Fie d un divizor comun al numerelor $6n + 7$ și $7n + 2$. Atunci $6n + 7 = d \cdot A$; $7n + 2 = d \cdot B$, de unde și $7dA - 6dB = 7(6n + 7) - 6(7n + 2) = 49 - 12 = 37$. Deci numerele pot admite ca divizor comun propriu numai pe 37. Din $6n + 7 = 37A$ rezultă: $n = \frac{37A-7}{6} = 6A-1 + \frac{A-1}{6} = 6(6p+1) - 1 + p = (am pus condiția $A-1 = 6p, p \in \mathbb{N}$) $= 37p + 5, p \in \mathbb{N}$. În acest fel, fracția se simplifică prin 37 pentru $n = 37p + 5, p \in \mathbb{N}$; $\frac{6n+7}{7n+2} = \frac{6(37p+5)+7}{7(37p+5)+2} = \frac{37(6p+1)}{37(7p+1)} = \frac{6p+1}{7p+1}$.$

31. a) În prima zi s-a arat $\frac{3}{13}$ din toată suprafața. În ziua a II-a: $\frac{4}{11} \left(1 - \frac{3}{13}\right) = \frac{4}{11} \cdot \frac{10}{13} = \frac{40}{143}$ din

lot. În ziua a III-a: $\frac{4}{7} \left(1 - \frac{3}{13} - \frac{40}{143}\right) = \frac{4}{7} \cdot \frac{70}{143} = \frac{40}{143}$ din lot. Deci cantități egale în zilele II și

III. În ziua a IV-a: $1 - \frac{3}{13} - \frac{80}{143} = \frac{30}{143} < \frac{40}{143}$ și $\frac{30}{143} < \frac{3}{13} = \frac{33}{143}$, deci în ziua a IV-a s-a arat cel

mai puțin; b) $I - IV = 6 \text{ ha} \Rightarrow \frac{3}{13} - \frac{30}{143} = \frac{3}{143}$ reprezintă 6 ha, de unde $S = 6 \cdot \frac{143}{3} = 286 \text{ ha}$.

Deci în ziua I: 66 ha, II și III: 80 ha și IV: 60 ha.

32. Dacă primul elev are x lei și al doilea y lei, atunci $y + \frac{x}{3} = \frac{2}{3}(x + y) \Leftrightarrow \frac{y}{3} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = y$.

Deci $2x = 500, x = y = 250 \text{ lei}$.

33. Avem $I = \frac{3}{5}II = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{3}III = \frac{7}{5}III$; $II = \frac{7}{3}III$. Deci $\frac{7}{5}III \cdot III = 1260 \Rightarrow III \cdot III = 1260 \cdot \frac{5}{7} =$

$= 900 \Rightarrow III^2 = 900 \Rightarrow III = 30 \Rightarrow II = \frac{7}{3}III = \frac{7}{3} \cdot 30 = 70$; $I = \frac{3}{5}II = \frac{3}{5} \cdot 70 = 42$.

34. Numărul fiind împărțit la 7, el s-a micșorat cu $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ părți, adică 120. Deci $\frac{1}{7}$ din număr va reprezenta $120 : 6 = 20$, iar numărul întreg $20 \cdot 7 = 140$.

35. Să presupunem că s-au vândut x caiete, y creioane și z maculatoare. Deci $y = \frac{z}{2}$ și $x =$

$= 3y = \frac{3z}{2}$. Costul lor este $1,10x + 0,90y + 0,95z = 305$ sau $110 \cdot \frac{3z}{2} + 90 \cdot \frac{z}{2} + 95z = 30500 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 305z = 30500 \Rightarrow z = 100$ maculatoare, $y = 50$ creioane, $x = 150$ caiete.

36. $a = 60$.

37. $24 \cdot \frac{1}{3} = 8 \text{ } \ell$; $24 - 8 = 16 \text{ } \ell$; $16 \cdot \frac{1}{4} = 4 \text{ } \ell$; $24 - 8 + 4 = 20 \text{ } \ell$. În bazin mai încăp 80 ℓ .

38. 468.

39. Conform ipotezei, $A = \frac{3}{5}B$ și $1,25(A + 20) = B$ sau $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5}B + 25 = B \Rightarrow \frac{1}{4}B = 25, B = 100$ și apoi $A = 60$.

4. Procente. Rădăcina pătrată. Rapoarte și proporții; proporții derivate. Probleme

1. $x + y + z + t = 1400$; $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}; \frac{y}{z} = \frac{3}{5}; \frac{z}{t} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{t}{4} = \frac{x+y+z+t}{14} = \frac{1400}{14} = 100$;
 $x = 200; y = 300; z = 500; t = 400$.

2. Fie $\overline{ab}$ numărul cerut. Atunci: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3+4}{4-3} = \frac{7}{1} \Leftrightarrow \overline{ab} = 71$.

3. Dacă L_1, l_1, L_2, l_2 sunt dimensiunile celor două dreptunghiuri, putem scrie $\frac{L_1}{L_2} = \frac{4}{3}; \frac{l_1}{l_2} = \frac{7}{9} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{L_1 l_1}{L_2 l_2} = \frac{28}{27} \Leftrightarrow \frac{L_1 l_1 - L_2 l_2}{L_2 l_2} = \frac{28-27}{27} = \frac{1}{27}; \frac{1}{4L_2 l_2} = \frac{1}{27} \Rightarrow L_2 l_2 = \frac{27}{4} \text{ cm}^2; L_1 l_1 = \frac{28 \cdot L_2 l_2}{27} = 7 \text{ cm}^2$.

4. $n = 1986(1986 - 1) - 1985 = 1986 \cdot 1985 - 1985 = 1985(1986 - 1) = 1985^2$. Atunci
 $\frac{x}{1985} = \frac{397}{1985^2} \Leftrightarrow \frac{x}{1985} \cdot 1985^2 = 5 \cdot 397 \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 397}{1985} = 1$.

5. Fie a și b numerele. Avem: $a^3 - b^3 = 61$, iar $\frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{125}{64} \Leftrightarrow \frac{a^3 - b^3}{b^3} =$
 $= \frac{125-64}{64} = \frac{61}{64} \Leftrightarrow \frac{61}{b^3} = \frac{61}{64} \Leftrightarrow b^3 = 64 \Rightarrow b = 4$. De aici rezultă $a = 5$.

6. Notăm: $\frac{1}{x} = \frac{4}{y} = \frac{8}{z} = \frac{2}{t} = \frac{1}{r} \Rightarrow x = r; y = 4r; z = 8r; t = 2r$. Dar $xy = z \Leftrightarrow 4r^2 = 8r \Leftrightarrow r = 2$.

Așadar, $x = 2, y = 8, z = 16, t = 4$.

7. Fie $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = R; \frac{xyz}{3 \cdot 5 \cdot 7} = R^3; R^3 = \frac{139755}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 11^3 \Rightarrow R = 11$. De unde: $\frac{x}{3} = 11 \Rightarrow x = 33$;
 $\frac{y}{5} = 11 \Rightarrow y = 55; \frac{z}{7} = 11 \Rightarrow z = 77$.

8. $\frac{x}{0,25} = \frac{y}{0,(3)} = \frac{z}{0,5} \Leftrightarrow 4x = 3y = 2z = r \Rightarrow x = \frac{r}{4}; y = \frac{r}{3}; z = \frac{r}{2}; r^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) = 54 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow r^2 \cdot \frac{9}{24} = 54 \Leftrightarrow r = 12$, deci $x = 3; y = 4; z = 6$.

9. Din relațiile date deducem: $a^2 - ax = by, b^2 - by = cz, c^2 - cz = ax$ pe care le adunăm și obținem relația dată.

10. Fie a, b cele două numere. Atunci: $a - b = 700; \frac{a}{b} = 8 \Rightarrow b = 100$ și $a = 800$.

11. a) $6ad = 4bc = 2b \cdot 2c = 2b \cdot 3b = 6b^2 \Rightarrow ad = b^2$; b) $b = 2a, c = \frac{3b}{2} = 3a, d = \frac{4c}{3} = 4a$;

$a + b + c + d = a + 2a + 3a + 4a = 10a$; $10a = 60 \Rightarrow a = 6, b = 12, c = 18, d = 24$.

12. Constatăm că $\sqrt{4830} \approx 69$, așadar $4830 = 69 \cdot 70$. În mod asemănător $448230 = 669 \cdot 670$ și $44482230 = 6669 \cdot 6670$.

13. $x = 12$.

14. $\sqrt{224_{(5)}} = \sqrt{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4} = \sqrt{64} = 8$; $0,1458(3) = \frac{14583 - 1458}{90000} = \frac{13125}{90000} = \frac{4375}{30000}$;

$11202_{(3)} = 128$. Atunci: $\frac{8 \cdot 30000}{4375} = \frac{128 \cdot 24}{x} \Leftrightarrow \frac{128 \cdot 24 \cdot 4375}{8 \cdot 30000} = 56 \Rightarrow x = 56$.

15. $a = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$; $b = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$; $b = \sqrt{\frac{1,1 - 0,1}{1,4 - 1,15}} = \frac{1}{\sqrt{0,25}} = 2$; $b - a = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

16. $0,0(2) = \frac{2}{90}$; $\sqrt{0,0(2)} = \sqrt{\frac{5}{90}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 90}{2}} = \sqrt{225} = 15$; $\sqrt{0,0(02)} = \sqrt{\frac{55}{2}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 10}{2}} = 3 \cdot 5 \cdot 11$;

$\sqrt{0,0(002)} = 3 \cdot 5 \cdot 111$; $N = 4 + 15 + 3 \cdot 5 \cdot 11 + 3 \cdot 5 \cdot 111 = 1849 = 43^2$.

17. $\frac{x-y}{x+y} = \frac{m-n}{m+n}$; $\frac{px+qy}{px-xy} = \frac{pm+qn}{pm-qn}$; $y = \frac{nx}{m} \Rightarrow \frac{px+qy}{rx+sy} = \frac{px+q \frac{nx}{m}}{rx+s \frac{nx}{m}} = \frac{mpx+nqx}{mr+ns} = \frac{x(mp+nq)}{x(mr+ns)} = \frac{mp+nq}{mr+ns}$.

18. a) $\frac{v_1}{2 \frac{1}{2}} = \frac{v_2}{5} = \frac{v_3}{6} = \frac{5}{5} = 2 \Rightarrow v_2 = 10 \text{ km/h}$ – viteza călare, iar viteza cu bicicleta: $v_3 =$

$= 12 \text{ km/h}$; b) $S = 5t = 6(t - 18) \Rightarrow t = 6 \cdot 18 = 108 \text{ min} = 1 \frac{4}{5} \text{ h}$. Deci distanța de la gară până în

sat va fi: $S = 5 \cdot \frac{9}{5} = 9 \text{ km}$.

19. Dacă x lei a costat pardesiul înainte de reducerea prețurilor, după prima reducere el a costat:

$x - \frac{15x}{100} = \frac{85x}{100} = \frac{17x}{20}$, iar după a doua reducere: $\frac{17x}{20} - \frac{17x}{20} \cdot \frac{10}{100} = \frac{153x}{200}$. Așadar, $\frac{153x}{200} = 612$,

de unde $x = \frac{612 \cdot 200}{153} = 4 \cdot 200 = 800 \text{ lei}$.

20. Să observăm că pentru 100 părți sticlă sunt necesare $68 + 36 + 20 = 124$ părți nisip, sodă și var, adică 124% din alte materiale. Pentru 300 tone sticlă vor fi necesare: $300 \cdot \frac{124}{100} = 372 \text{ tone}$

de nisip, sodă și var, din care $300 \cdot \frac{68}{100} = 204$ tone nisip, $300 \cdot \frac{36}{100} = 108$ tone sodă și

$$300 \cdot \frac{20}{100} = 60 \text{ tone var.}$$

21. 4000 lei.

22. Dacă 1 reprezintă întreaga suprafață arabilă, atunci $\frac{2}{5}$ s-au cultivat cu porumb,

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{10} \text{ cu grâu, } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{20} \text{ cu orz și restul de } 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{20} \right) = \frac{3}{20}$$

cu ovăz, care reprezintă 18 ha. Deci $\frac{3}{20}$ din întreaga suprafață reprezintă 18 ha, adică întreaga

suprafață va fi de $18 \cdot \frac{20}{3} = 6 \cdot 20 = 120$ ha, din care $120 \cdot \frac{2}{5} = 48$ ha cu porumb, $\frac{3}{10} \cdot 120 = 36$ ha cu grâu, 18 ha cu orz și 18 ha cu ovăz.

5. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă; regula de trei compusă. Probleme

1. 7,462 £; 2. 26; 13; 57.

3. Utilizăm regula de trei compusă: 10 muncitori efectuează lucrarea în 20 zile; 1 muncitor efectuează lucrarea în 200 zile; 1 muncitor efectuează $\frac{1}{2}$ din lucrare în 100 zile; 4 muncitori efectuează $\frac{1}{2}$ din lucrare în 25 zile, deci cei patru muncitori care au rămas au lucrat încă 25 zile.

4. 10 muncitori.

5. 7 țesătoare.

6. Fie x, y, z și t aceste numere; atunci vom avea: $7x = 8y = 9z = 10t = A$ sau $x = \frac{A}{7}; y = \frac{A}{8};$

$z = \frac{A}{9}; t = \frac{A}{10}; A$ poate fi orice număr natural care se divide la fiecare din acești numitori. Cele

mai mici numere se vor obține alegând pe A drept cel mai mic multiplu comun al numerelor

7, 8, 9 și 10. $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Așadar, $x = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7}{7} = 360; y = 315; z = 280; t = 252$.

7. Dacă toată cantitatea ar fi conținut numai săpun de 4 lei bucata, s-ar fi încasat $45360 \cdot 4 = 181440$ lei. Diferența de 30240 lei s-a obținut de la diferența de preț per bucată: $6 - 4 = 2$ lei. Așadar au fost în total: $30420 : 2 = 15120$ bucăți de săpun de 6 lei bucata și $45360 - 15120 = 30240$ bucăți săpun de 4 lei.

8. Dacă toate cele 100 de piese ar fi de 9 kg fiecare, ele ar cântări $9 \cdot 100 = 900$ kg. Diferența de $1390 - 900 = 490$ kg, se justifică prin diferența de greutate a pieselor de 23 kg: $23 - 9 = 14$. Așadar vom avea: $490 : 14 = 35$ piese de 23 kg și $100 - 35 = 65$ piese de 9 kg fiecare.

9. Dacă ar fi mers cu 42 km/h timp de 4 ore, ar fi parcurs numai $42 \cdot 4 = 168$ km, adică mai puțin cu 20 km. Această diferență a fost parcursă datorită diferenței de viteză, $50 - 42 = 8$ km. Deci a mers cu 50 km/h timp de $20 : 8 = 2,5$ ore și a parcurs distanța de $2,5 \cdot 50 = 125$ km. Restul de $188 - 125 = 63$ km au fost parcurși cu viteza de 42 km/h.

10. Dacă cele 11 bilete ar fi fost toate de cinci lei, ele ar fi costat $11 \cdot 5 = 55$ lei. Diferența până

la 65 lei provine din diferența de preț a biletelor de 7 lei, deci $\frac{65-55}{7-5} = \frac{10}{2} = 5$ bilete de 7 lei și 6 bilete de 5 lei.

11. Dacă ar fi fost numai monede de 3 lei, acestea ar fi însemnat $182 \cdot 3 = 546$ lei. Diferența până la 1800 lei se datorează monedelor de 25 lei, deci $(1800 - 546) : (25 - 3) = 1254 : 22 = 57$ monede de 25 lei, iar restul de $182 - 57 = 125$ monede au fost de 3 lei.

12. 45 zile.

6. Utilizarea principiului cutiei în rezolvarea problemelor

1. Persoanele (care sunt în număr de 8), sunt cu 1 mai multe decât zilele săptămânii, deci avem o ilustrare a principiului cutiei (P_1).

2. Se aplică principiul cutiei în forma generală (P_2). Cei 37 de elevi trebuie repartizați în cele 12 luni ale anului. Dat fiind că $37 = 12 \cdot 3 + 1$, conform principiului cutiei sub forma (P_2), există cel puțin $3 + 1 = 4$ elevi care s-au născut în aceeași lună.

3. a) Se observă că de la 1 la 9 sunt trei numere divizibile cu 3 (anume 3, 6 și 9), iar celelalte 6 nu sunt divizibile cu 3. Extrăgând 7 bile, cel mai nefavorabil caz este acela ca 6 dintre ele să aibă numere care nu sunt divizibile cu 3.

Dacă vrem să aplicăm principiul cutiei, utilizăm teorema. Ne imaginăm două cutii: una în care punem numerele divizibile cu 3 și alta în care punem numerele ce nu sunt divizibile cu 3. Știm că numărul maxim de numere ce nu sunt divizibile cu 3, existente printre cele 9 numere date, este 6.

Fie $m_1 = 1$, $m_2 = 7$; atunci numărul bilelor ce se repartizează în cele două cutii este egal cu: $m_1 + m_2 - n + 1 = 1 + 7 - 2 + 1 = 7$, și este numărul bilelor extrase din săculeț.

Teorema ne spune că avem sau $m_1 = 1$ sau $m_2 = 7$. Dar am văzut că $m_2 = 7$ este imposibil. Deci $m_1 = 1$.

b) La împărțirea cu 3 se obțin resturile: 0, 1 sau 2. **Resturile reprezintă cutiile.** Fiind 7 bile și 3 cutii, dat fiind că $7 = 3 \cdot 2 + 1$, vom avea cel puțin o cutie cu 3 bile. Este aplicarea (P_2) pentru $k = 2$. Dacă a, b, c sunt cifrele de pe cele 3 bile, atunci trei numere distincte care se divid cu 3 sunt $\overline{abc}$, $\overline{bac}$ și $\overline{cab}$, deoarece $a + b + c$ se divide cu 3, pentru că a, b, c dau același rest la împărțirea cu 3.

Altă soluție. Din cele 7 numere extrase, cel puțin 3 sunt consecutive, iar suma lor este multiplu de 3. Iată justificarea.

Formăm cutiile: $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$. Alegând 7 numere, cum $7 = 3 \cdot 2 + 1$, trei dintre numere vor fi în aceeași cutie. Dar cele 3 cifre sunt consecutive, deci ele formează un număr divizibil cu 3.

Observație. Cutiile le formăm noi, adecvat cu situația!

4. Formăm următoarele 10 cutii: $\{1, 19\}$, $\{2, 18\}$, $\{3, 17\}$, $\{4, 16\}$, $\{5, 15\}$, $\{6, 14\}$, $\{7, 13\}$, $\{8, 12\}$, $\{9, 11\}$, $\{10\}$. Deci formăm 9 grupe de câte două numere cu suma 20, iar o 10 formează singur o grupă. Având **zece cutii și unsprezece numere**, conform (P_1), într-una din cutii vom avea (cel puțin) două numere. Din modul cum am format cutiile, suma celor două numere este 20.

Observația 1. Numărul **unsprezece** este cel mai mic cu puțință, căci **putem** alege 10 numere astfel încât oricare două să nu însumeze 20, anume: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Observația 2. Problema se poate generaliza ușor: Să se arate că oricum am alege $n+1$ numere din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$, există printre ele două a căror sumă este $2n$.

Formăm următoarele n cutii: $\{1, 2n-1\}$, $\{2, 2n-2\}$, ..., $\{n-1, n+1\}$, $\{n\}$ etc.

5. Fie cutiile: $C_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $C_2 = \{3, 6, 12, 24\}$, $C_3 = \{5, 10, 20\}$, $C_4 = \{7, 14, 28\}$, $C_5 = \{9, 18\}$, $C_6 = \{11\}$, $C_7 = \{13\}$, $C_8 = \{15\}$, $C_9 = \{17\}$, $C_{10} = \{19\}$, $C_{11} = \{21\}$, $C_{12} = \{23\}$, $C_{13} = \{25\}$, $C_{14} = \{27\}$, $C_{15} = \{29\}$. Alegând 16 numere, conform (P_1) două din ele vor fi în aceeași cutie (cu două elemente !). Din felul în care am format cutiile, se observă că oricum am considera două numere a și b , avem $a|b$ sau $b|a$.

6. Dacă $X \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, unde $\text{card } X \leq 3$, atunci valorile posibile pentru S_X sunt: 0, 1, 2, ..., 24.

Ultima se realizează pentru $X = \{7, 8, 9\}$. Dacă am ales 26 de submulțimi, cum lor nu le pot corespunde mai mult de 25 de numere, rezultă că există două submulțimi A și B astfel încât $S_A = S_B$.

7. Dat fiind că $106 = 5 \cdot 21 + 1$, conform **principiului cutiei**, va exista cel puțin o cutie cu cel puțin $21+1 = 22$ bile. Cum $22 = 3 \cdot 7 + 1$, conform **principiului cutiei**, în acea cutie vor exista cel puțin $7+1 = 8$ bile de aceeași culoare.

8. Să numerotăm locurile 1, 2, 3, ..., 36. Formăm cutiile din locurile diametral opuse: $\{1, 19\}$, $\{2, 20\}$, $\{3, 21\}$, ..., $\{17, 35\}$, $\{18, 36\}$. Astfel avem 18 cutii. Obiectele vor fi cele 19 fete.

Conform principiului cutiei, oricum se vor așeza cele 19 fete, două din ele se vor afla față în față.

9. Fie d_k numărul necesar de mișcări ale mesei (cu câte un loc, în sensul acelor de ceasornic) pentru ca musafirul M_k să stea în dreptul cardului său. Pentru ca un card să ajungă în dreptul unei persoane sunt posibile maximum 17 mișcări (rotiri). Deci cele 18 numere $d_1, d_2, \dots, d_{18}$ aparțin mulțimii 1, 2, ..., 17. Conform principiului cutiei, printre cele 18 persoane există două, să zicem M_i și M_j , ce se află la aceeași distanță de cardurile lor.

Observație. Problema este simplă, după ce am găsit modelul. Exemplificăm cu un desen. Să presupunem că avem 7 persoane care s-au așezat ca în desenul alăturat.

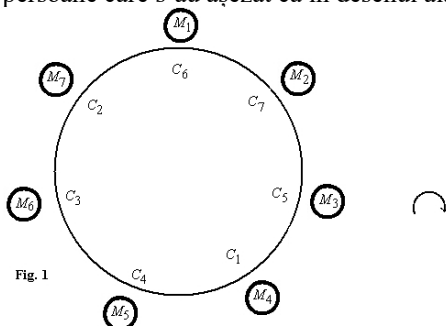


Fig. 1

Cum se explică faptul că după un număr de rotiri am găsit două persoane corect așezate?

Persoana	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
nr. necesar de rotiri	4	2	4	6	2	5	5

La 7 persoane este necesar un număr de maximum 6 rotiri. Conform principiului cutiei, vor exista 2 persoane care necesită același număr de rotiri.

Dacă sunt 12 persoane – vor fi necesare maximum 11 rotiri...

Dacă sunt n persoane – vor fi necesare maximum $n-1$ rotiri...

10. Fie x_k , $1 \leq k \leq 35$ numărul partidelor analizate până în ziua k inclusiv. Atunci au loc relațiile: $1 \leq x_1 < \dots < x_{34} < x_{35} \leq 50$, de unde $1 + 19 \leq x_1 + 19 < \dots < x_{34} + 19 < x_{35} + 19 \leq 50 + 19$ sau $20 \leq x_1 + 19 < \dots < x_{34} + 19 < x_{35} + 19 \leq 69$. Astfel, printre cele 70 de numere $x_1, x_2, \dots, x_{35}$, $x_1 + 19, x_2 + 19, \dots, x_{35} + 19$ doar 69 sunt distincte. Conform principiului cutiei, din cele 70 de numere două trebuie să fie egale. Rezultă că unul din numerele $x_1, x_2, \dots, x_{35}$ este egal cu unul din numerele $x_1 + 19, x_2 + 19, \dots, x_{35} + 19$, adică există m și n astfel încât $x_n = x_m + 19$. Așadar în zilele $m + 1, m + 2, \dots, n$ şahistul a analizat în total 19 partide.

11. Se observă că numărul de prieteni pe care îi poate avea un elev din acea școală este 0, 1, ... sau 2006.

Pe de altă parte, nu este cu putință ca în școală să existe un elev cu 0 prieteni și un altul cu 2006 prieteni; pentru că elevul care are 2006 prieteni este prieten toți, ceea ce exclude posibilitatea să mai fie cineva fără prieten (fapt ce rezultă din ipoteza făcută asupra relației de prietenie). Prin urmare există doar două posibilități: numărul de prieteni ai fiecărui elev este fie din mulțimea $A = \{0, 1, \dots, 2005\}$, fie din mulțimea $B = \{1, 2, \dots, 2006\}$. Dar $\text{card } A = \text{card } B = 2006$, iar în școală sunt 2007 elevi, prin urmare, aplicând principiul cutiei (P_1), există cel puțin doi elevi cu același număr de prieteni.

12. Să observăm că ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi: 0, 1, 4, 5, 6, 9.

a) Alegând 7 numere pătrate perfecte, cum pentru ultima lor cifră avem 6 posibilități, conform principiului cutiei (P_1), printre ele există cel puțin două care au aceeași ultimă cifră. Diferența celor două numere este divizibilă cu 10.

b) Ținând seama de paritatea unui pătrat perfect, putem forma cutiile: $\{0, 4, 6\}$, $\{1, 5, 9\}$. Având 5 pătrate perfecte, dacă ele au două câte două ultima cifră distinctă, atunci trei din cele 5 vor avea aceeași paritate. În oricare din cele două cazuri, suma a două dintre ele se divide cu 10 (pentru că $4 + 6 = 10$, iar $1 + 9 = 10$).

Dacă două dintre ele au ultima cifră identică, atunci diferența lor are ultima cifră 0, deci diferența lor este divizibilă cu 10.

13. Folosind teorema împărțirii cu rest: $n = 2005 \cdot c + r$, cu $r < 2005$ și r impar rezultă că $r \in \{1, 3, 5, 7, \dots, 2001, 2003\}$, r ia 1002 valori. Cum avem 1003 numere, există două care dau același rest r la împărțirea lor prin 2005. Avem $n_1 = 2005 \cdot c_1 + r$ și $n_2 = 2005 \cdot c_2 + r$, $n_1 - n_2 = 2005 \cdot (c_1 - c_2)$, deci $2005 \mid (n_1 - n_2)$.

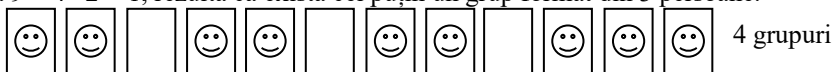
14. Fie $x_1, x_2, \dots, x_{504}$ cele 504 numere. Atunci următoarele 2016 numere $x_1, x_2, \dots, x_{504}, x_1 + 3, x_2 + 3, \dots, x_{504} + 3$, $x_1 + 5, x_2 + 5, \dots, x_{504} + 5$, $x_1 + 8, x_2 + 8, \dots, x_{504} + 8$ sunt cel mult egale cu $2007 + 8 = 2015$. Am obținut astfel un număr de $4 \cdot 504 = 2016$ numere, toate aparținând mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 2015\}$. Conform principiului cutiei, rezultă că două dintre ele sunt egale, să zicem $x_i + a$ și $x_j + b$, unde $a \neq b$, $a, b \in \{0, 3, 5, 8\}$ și $i, j \in \{1, 2, \dots, 504\}$. Prin urmare (presupunând ordinea $x_i < x_j$), rezultă $x_i - x_j = a - b \in \{2, 3, 5, 8\}$.

15. Observăm că putem scrie: $M = \{4 + 7 \cdot k \mid k = 0, 1, 2, \dots, 28\}$ deci $\text{card } M = 29$. Formăm următoarele 15 cutii (14 submulțimi alcătuite din câte două numere a căror sumă este 211, iar a XV-a cutie conține doar din numărul 4): $M_1 = \{11, 200\}$, $M_2 = \{18, 193\}$, $M_3 = \{25, 186\}$, ..., $M_{14} = \{102, 109\}$, și $M_{15} = \{4\}$. Să observăm că mulțimile $M_1, M_2, \dots, M_{14}, M_{15}$ sunt

disjuncte și reuniunea lor este chiar M . Aceasta rezultă din faptul că pentru $k = 1, 2, \dots, 14$, avem $M_k = \{4 + 7 \cdot k, 4 + 7 \cdot (29 - k)\}$, iar o relație de forma $4 + 7 \cdot k = 4 + 7 \cdot (29 - k)$ este imposibilă în mulțimea numerelor naturale.

Conform principiului cutiei (P_1), oricum am alege 16 elemente (obiecte) din mulțimea M , două din ele se vor afla în aceeași cutie, adică au suma 211.

16. Cele 3 scaune care rămân libere separă cele 9 scaune ocupate în **maximum 4 grupe**. Dat fiind că $9 = 4 \cdot 2 + 1$, rezultă că există cel puțin un grup format din 3 persoane.



17. Cazul 1. Există 4 bile de aceeași culoare, propoziția este adevărată.

Cazul 2. Nu există patru bile de aceeași culoare. Atunci cel mult trei bile au aceeași culoare. Cum $10 = 3 \cdot 3 + 1$, conform principiului cutiei, rezultă că există cel puțin o bilă care are o a patra culoare.

18. Vom face observația că un număr real diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{10^n}$, dacă primele n zecimale ale aceluși număr real sunt $\underbrace{00\dots00}_{n \text{ ori}}$ sau $\underbrace{99\dots99}_{n \text{ ori}}$.

a) Considerăm mulțimea $M = \{k\sqrt{3} \mid k = 1, 2, \dots, 999\}$. Primele 3 cifre de după virgulă ale acestor 999 numere pot fi: 000, 001, ..., 999, deci avem 1000 cazuri posibile.

Presupunem că toate numerele mulțimii M au primele trei zecimale diferite de 000 și 999. Atunci pentru primele 3 cifre zecimale rămân 998 de posibilități. Cum $\text{card}(M) = 999$, conform **principiului cutiei**, rezultă că există doi întregi j și k cu $1 \leq j < k \leq 999$ astfel încât $j\sqrt{3}$ și $k\sqrt{3}$ au primele 3 cifre zecimale identice. Deci numărul $(k - j)\sqrt{3}$ are primele 3 cifre zecimale 000 sau 999. Cum $k - j$ este un număr cuprins între 1 și 999, am obținut o contradicție. Prin urmare, există un număr de forma $k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}^*$, care diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{1000}$.

b) Considerăm mulțimea $M = \{k\sqrt{3} \mid k = 1, 2, \dots, 10^n - 1\}$. Primele n cifre de după virgulă ale acestor $10^n - 1$ numere pot fi: $\underbrace{00\dots00}_{n \text{ ori}}$, $\underbrace{00\dots001}_{n-1 \text{ ori}}$, ..., $\underbrace{99\dots99}_{n \text{ ori}}$, deci avem 10^n cazuri posibile.

Presupunem că aceste $10^n - 1$ numere au primele n zecimale diferite de $\underbrace{00\dots00}_{n \text{ ori}}$ și $\underbrace{99\dots99}_{n \text{ ori}}$.

Prin urmare rămân $10^n - 2$ posibilități pentru primele n cifre zecimale. Cum $\text{card } M = 10^n - 1$, conform **principiului cutiei**, rezultă că există doi întregi j și k cu $1 \leq j < k \leq 10^{n-1}$ astfel încât $j\sqrt{3}$ și $k\sqrt{3}$ au primele n cifre zecimale identice. Atunci numărul $(k - j)\sqrt{3}$ are primele n cifre zecimale $\underbrace{00\dots00}_{n \text{ ori}}$ sau $\underbrace{99\dots99}_{n \text{ ori}}$. Cum $k - j$ este un număr cuprins între 1 și $10^n - 1$, am

obținut o contradicție. Așadar există un număr de forma $k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}^*$, care diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{10^n}$.

Observație. Problema se generalizează fără dificultate:

Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, m diferit de un pătrat perfect, există un număr de forma $k\sqrt{3}$, $k \in \mathbb{N}^*$, multiplu natural (nenul) al lui $\sqrt{m}$ care diferă de un număr întreg cu mai puțin de $\frac{1}{10^n}$.

7. Exerciții și probleme recapitulative

- $A = \{5, 6, 7, \dots, 15\}$, $B = \{13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, $C = \{5, 6, 7\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
- $$\begin{cases} x+56=n^2 \\ x+113=m^2 \end{cases} \Rightarrow m^2 - n^2 = 57 = 3 \cdot 19 \text{ sau } (m-n)(m+n) = 3 \cdot 19, \text{ de unde } m-n=3 \text{ și } m+n=19, \text{ cu } m=11, n=8. \text{ Deci } x=121-113=8.$$
- a) $2^n = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} + 1)$; b) $(3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1) = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.
- 120 m, 160 m, 200 m.
- Cele patru puteri au ca ultimă cifră: 1, 4, 7, 6. Deci E are ca ultimă cifră pe 7, ori se știe că nici un număr natural pătrat perfect nu se termină în cifra 7.
- $A = \{17, 18, 20, 21\}$; $B = \{4, 5\}$; $C = \{4, 5\}$. Deci $B = C$, iar $A \cap B = \emptyset$.
- $A = \{7080, 7380, 7680, 7980, 7185, 7485, 7785\}$; $B = \{7080, 7280, 7480, 7680, 7880\}$;
 $A \cup B = \{7080, 7280, 7380, 7480, 7680, 7880, 7980, 7185, 7485, 7785\}$;
 $A \cap B = \{7080, 7680\}$; $A \setminus B = \{7380, 7980, 7185, 7485, 7785\}$; $B \setminus A = \{7280, 7480, 7880\}$;
 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{7020, 7380, 7480, 7880, 7980, 7185, 7485, 7785\}$.
- Să observăm că un zero se obține din produsul $2 \cdot 5$. Cum frecvența în produs a factorului 2 este mai mare decât a lui 5, este suficient să numărăm frecvența de apariție a lui 5, care se repetă din 5 în 5 numere: $100 : 5 = 20$ ori în P . Dar factorul 5 poate apărea și la puteri mai mari: 5^2 ; $100 : 25 = 4$. Deci numărul zerourilor cu care se termină produsul P coincide cu numărul de factori 5, adică 24.
- a) $x - \left\{ 57 - 2^2 \cdot \left[10 + \frac{2^{75} \cdot 5^{50}}{2^{73} \cdot 5^{50}} \right] \right\} \cdot 5 \leq 5 \Leftrightarrow x - [57 - 4(10 + 4)] \cdot 5 \leq 5 \Leftrightarrow x - 5 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 10$;
b) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, e\}$.
- 10 lei o lingură, 5 lei o linguriță, 7 lei o furculiță.
- Se observă că pentru o problemă rezolvată bine se acordă 5 puncte, iar pentru una greșită se scad 3 puncte. Așadar, pentru 8 probleme bine rezolvate și una greșită se vor acorda: $8 \cdot 5 - 3 = 40 - 3 = 37$ puncte.
- Din calcul, rezultă $A = \left\{ 1; \frac{3}{2} \right\}$; $B = \left\{ \frac{3}{2}; x \right\}$. De unde $x = 1$.
- Fracția se mai poate scrie: $F = \frac{2x+4}{2x+5-2} = \frac{2x+4}{2x+3}$. Dacă, prin absurd, numerele $2x+4$ și $2x+3$ ar avea un divizor comun d , atunci și diferența lor: $2x+4 - (2x+3) = 1$ trebuie să aibă același divizor comun. Dar 1 nu are divizori decât pe ± 1 , deci numerele sunt prime între ele, adică fracția este ireductibilă.
- $n \in \{0; 1\}$.
- $A = a^{(1-\sqrt{3})^2} = a^{1-2\sqrt{3}+3} = a^{4-2\sqrt{3}} = a^{2(2-\sqrt{3})}$; $B = (a^{2-\sqrt{3}})^2 = a^{2(2-\sqrt{3})}$. Deci $A = B$.
- Egalitatea dată se mai scrie: $(p-2)(q-2) = 6$ care ne oferă posibilitățile: 1) $p-2 = 1$ și

$q - 2 = 6 \Rightarrow p = 3$ și $q = 8$; 2) $p - 2 = 3$ și $q - 2 = 2 \Rightarrow p = 5$ și $q = 4$; 3) $p - 2 = 2$ și $q - 2 = 3 \Rightarrow p = 4$ și $q = 5$; 4) $p - 2 = 6$ și $q - 2 = 1 \Rightarrow p = 8$ și $q = 3$; 5) $p - 2 = -1$ și $q - 2 = -6$ și celelalte care nu admit soluții numere naturale.

17. Fie $2n + 1$ numărul echipelor participante. Fiecare echipă joacă $2n$ meciuri cu celelalte $2n$ echipe rămase. În total $2n(2n + 1)$; dar fiecare meci a fost numărat de 2 ori, deci s-au jucat $\frac{2n(2n+1)}{2}$ meciuri. De unde $n(2n + 1) = 55 \Leftrightarrow 2n^2 + n - 55 = 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 10n + 11n - 55 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2n(n - 5) + 11(n - 5) = 0 \Leftrightarrow (n - 5)(2n + 11) = 0 \Leftrightarrow n = 5$. Deci au fost 11 echipe.

18. Efectuăm următoarele operații: umplem vasul de 9 l, din care vărsăm în cel de 4 l de 2 ori. Transferăm litrul rămas în vasul de 4 l devenit disponibil. În acest vas mai trebuie puși 3 l pentru a se umple. Din vasul de 9 litri turnăm în cel de 4 l până la umplere, deci rămân $9 - 3 = 6$ l.

19. Procedăm în felul următor: umplem vasul de 11 l și turnăm în cel de 9 l până se umple. Rămân 2 l pe care îi transferăm în vasul de 9 l, golit în prealabil. Umplem din nou vasul de 11 l și turnăm în cel de 9 l până se umple; de fapt, având deja 2 l, îi mai trebuie $9 - 2 = 7$ l, iar în vasul de 11 rămân: $11 - 7 = 4$ l, pe care îi transferăm din nou în vasul de 9 l. Umplem iarăși vasul de 11 l și turnăm în cel de 9 l, care conține deja 1 l și îi mai trebuie $9 - 4 = 5$ l până la umplere. Așadar, $11 - 5 = 6$ l. Vărsăm acești 6 l în vasul de 9 l și cu vasul de 11 l plin, fac în total $6 + 11 = 17$ l.

20. $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$, deci $5 \text{ dm}^3 = 5 \text{ l}$. Se umple vasul de 7 l, din care se scot de două ori câte 3 l, deci în vasul de 7 l se mai află un litru ce se va pune în vasul de 3 l. Se umple vasul de 7 l și se varsă în vasul de 3 l, în care se mai află 1 l de apă, 2 l, deci în vasul de 7 l au mai rămas 5 l.

21. Avem $E = 5 + \sqrt{2\left(\frac{45}{17} \cdot 340 - 100\right)} = 57 + \sqrt{2(900 - 100)} = 5 + \sqrt{1600} = 5 + 400 = 405$, deci

$a + b + c = 405$; $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$; $\frac{b}{6} = \frac{c}{8} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{9} = \frac{405}{9} = 45$. De unde: $a = 90$, $b = 135$, $c = 180$.

22. Conform relației $S = vt$, avem: $4(v_1 + v_2) = 140$; $28(v_1 - v_2) = 140$ sau $v_1 + v_2 = 35$ și $v_1 - v_2 = 5$, de unde: $2v_1 = 40$; $v_1 = 20 \text{ m/s}$, de unde rezultă și $v_2 = 15 \text{ m/s}$.

23. Trebuie ca $\overline{abcd} = 25k^4$ ($k \in \mathbb{N}$), care convine numai pentru $k = 3$; în acest caz $\overline{abcd} = 25 \cdot 81 = 2025$ și pentru $k = 4$ cu $\overline{abcd} = 25 \cdot 256 = 6400$.

24. Dând lui x valorile 1, 2, ..., 100 obținem: $E(1) = E(0) + 2$; $E(2) = E(1) + 2$; $E(3) = E(2) + 2$; ..., $E(99) = E(98) + 2$; $E(100) = E(99) + 2$; $E(100) = E(0) + 2 \cdot 100 \Rightarrow E(100) - E(0) = 200$.

25. Fie AB lungimea trenului, B poziția pietonului în care îl întâlnește trenul și BC drumul pe care îl face pietonul până în momentul în care trenul îl depășește. Vom nota cu v viteza trenului și deci viteza pietonului va fi $\frac{v}{10}$. Vom avea: $AC = S$ - drumul parcurs de tren pe tot timpul

depășirii; $S - \frac{S}{10} = \frac{9S}{10} = 135 \Rightarrow S = 150 \text{ m}$; $v_{\text{tren}} = \frac{150}{10} = 15 \text{ m/s}$; $v_{\text{pieton}} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ m/s}$.

26. Dacă elevul ar fi rezolvat corect toate cele 30 de probleme, el ar fi obținut $30 \cdot 10 = 300$ de puncte. La fiecare problemă greșit rezolvată el pierde odată cele 10 puncte acordate la o rezolvare corectă și în plus 3 puncte penalizare, deci în total 13 puncte. Elevul nerezolvând corect toate problemele, a pierdut $300 - 261 = 39$ de puncte care reprezintă $39 : 13 = 3$ probleme greșite, deci 27 probleme corecte.

27. Putem scrie: $S = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7}] + [\sqrt{8}] + [\sqrt{9}] + [\sqrt{10}] + \dots +$

$$+ [\sqrt{15}] + [\sqrt{16}] + \dots + [\sqrt{24}] + [\sqrt{25}] + \dots + [\sqrt{35}] + \dots + [\sqrt{81}] + \dots + [\sqrt{99}] + [\sqrt{100}] = 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 5 + \dots + 19 \cdot 9 + 10 = (2 \cdot 1 + 1) \cdot 1 + (2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + (2 \cdot 3 + 1) \cdot 3 + (2 \cdot 4 + 1) \cdot 4 + \dots + (2 \cdot 9 + 1) \cdot 9 + 10 = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 10 = 2(1 + 4 + 9 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81) + (1 + 2 + 3 + \dots + 9 + 10) = 2 \cdot 285 + 55 = 625.$$

28. Frația se mai poate scrie: $n + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n - 1}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{(-1)^n - 1}{a} \in \mathbb{Z}$, dar pentru n par,

$$\frac{(-1)^n - 1}{a} = 0 \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}^*, \text{ iar pentru } n \text{ impar, avem: } \frac{-1-1}{a} = \frac{-2}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \{-2, -1, 1, 2\}.$$

29. Într-adevăr, e suficient să luăm $x = 4 : \sqrt{4} = 2 < 4; y = 0$ sau $y = 1$ și $z = \frac{1}{4}; \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

30. $x = 2$.

31. Notăm cu $\{x\}$ partea fracționară a lui x și avem: $x = [x] + \{x\}$, cu $[x] = n \in \mathbb{Z}, \{x\} \in [0, 1)$.

Ecuția se scrie: $2n + 3 = 4n + 4\{x\} \Leftrightarrow \{x\} = \frac{3-2n}{4} \in [0, 1) \Leftrightarrow 3 - 2n \in [0, 4) \Leftrightarrow -2n \in$

$\in [-3, 1) \Leftrightarrow n \in \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right], n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 0 \text{ sau } n = 1$. Pentru $n = 0 \Rightarrow [x] = 0$ și $\{x\} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Pentru $n = 1 \Rightarrow [x] = 1$ și $\{x\} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$. Deci $x \in \left\{\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right\}$.

32. $x(1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101 \Rightarrow x[(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51)] = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101 \Leftrightarrow x \cdot 50 \cdot 101 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101 \Leftrightarrow x = 10$.

33. $\frac{3x+1}{2} \leq x+1 < \frac{3x+1}{2} + 1$, deci $\frac{3x-1}{2} \leq x < \frac{3x+1}{2} \Leftrightarrow 3x-1 \leq 2x < 3x+1 \Leftrightarrow -1 < x \leq 1$,

deci soluții vor fi $x = 0$ și $x = 1$.

34. Biciclistul face la urcare cu 9 ore mai mult decât la coborâre, deci parcurge în acest timp $9 \cdot 8 = 72$ km. Acest spațiu este parcurs de biciclist la coborâre prin diferența de viteză pe care o are la coborâre față de urcare: $26 - 8 = 18$. Deci timpul de parcurgere a distanței de la B la A este: $72 : 18 = 4$ ore, iar spațiul total AB va fi: $26 \cdot 4 = 104$ km.

35. Să remarcăm mai întâi că pătratul unui număr natural se termină în următoarele cifre: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Astfel, numărul 111 se termină cu cifra 1; 222^2 se termină cu cifra 4; 333^3 se termină cu cifra 7; 444^4 se termină cu cifra 6; 555^5 se termină cu cifra 5; 12315 se termină cu cifra 5. De aici se observă că numărul N are ultima cifră 8, de unde rezultă că N nu poate fi pătrat perfect.

36. Ecuția se scrie: $\frac{85}{11} + \frac{170}{23} + \frac{476}{x} = 17 \Leftrightarrow \frac{476}{x} = 17 - \frac{85}{11} - \frac{170}{23} \Leftrightarrow \frac{476}{x} = 3 - \frac{8}{11} - \frac{9}{23} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{476}{x} = \frac{476}{11 \cdot 23} \Leftrightarrow x = 11 \cdot 23 \Leftrightarrow x = 253.$$

37. a) $E = 2$; b) $\frac{2a+bx}{x-a} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{2-b}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ și $b \neq 2$.

38. Se știe că dacă $X \subset A$ și $X \subset B$, atunci $X \subseteq A \cap B$. De aici: $X \subseteq \{2, 3, 4, 6\} \cap \{2, 4, 5\} = \{2, 4\}$. Pe de altă parte, $\{2, 4\} \subseteq X$, de unde rezultă $X = \{2, 4\}$.

39. Avem: $4 \cdot \overline{abcde9} = \overline{9abcde} \Leftrightarrow 4(10\overline{abcde} + 9) = 9 \cdot 10^5 + \overline{abcde} \Leftrightarrow 39\overline{abcde} = 9(10^5 - 4) \Leftrightarrow \overline{13abcde} = 3 \cdot 99996 \Leftrightarrow \overline{abcde} = 7692 \cdot 3 = 23076$.

40. $\frac{6n+15}{2n+1} = 3 + \frac{12}{2n+1} \in \mathbb{Z}$. Deci $2n+1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Analizând toate cazurile,

obținem: $n \in \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow M = \{-9, -1, 7, 15\}$.

41. $A = \{a, b, c, d\}; B = \{c, d\}$.

42. $x = \frac{2n+6}{n+1} = 2 + \frac{4}{n+1}$ cu $n \in \{0, 1, 3\} \Rightarrow A = \{3, 4, 6\}, B = \{2, 5, 7\}$ și $C = \{7, 9, 13\}$.

43. Pe cazul general, mulțimea $A \cup B$ se compune din următoarele mulțimi disjuncte: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, deci $\overline{A \cup B} = \overline{A \setminus B} + \overline{A \cap B} + \overline{B \setminus A}$. De asemenea, funcționează și formula: $\overline{A \cup B} = \overline{A} + \overline{B} - \overline{A \cap B}$. De aici: 1) $20 = 16 + 17 - \overline{A \cap B} \Rightarrow \overline{A \cap B} = 33 - 20 = 13$; $\overline{A \setminus B} = \overline{A} - \overline{A \cap B} = 16 - 13 = 3$; 2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} + \overline{B} - \overline{A \cup B} = 16 + 17 - 31 = 33 - 31 = 2$; $\overline{A \setminus B} = \overline{A} - \overline{A \cap B} = 16 - 2 = 14$; $A \times B = 16 \cdot 17 = 272$.

44. Mulțimile sunt: $A = \{1, 2, 5\}, B = \{1, 3, 4, 5\}, C = \{2, 3, 4\}$.

45. Utilizăm „principiul cutiei”, conform căruia, dacă în fiecare din cele 4 clase, s-ar afla cel mult 30 elevi, atunci în cele 4 clase s-ar afla cel mult 120 de elevi. Deci trebuie să existe măcar o clasă cu cel puțin 31 elevi.

46. Folosim „principiul cutiei”. Conform acestuia, dacă în fiecare lună a anului ar fi născuți cel mult 3 elevi din clasă, în cele 12 luni ale anului ar fi născuți cel mult $12 \cdot 3 = 36$ elevi. Deci există o lună în care sunt născuți cel puțin patru elevi.

47. Numărul căutat este $7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 = 505$.

48. Putem scrie: $(10a + b)n = 100a + b$ echivalentă cu: $10a(10 - n) = b(n - 1)$. Deducem că $1 < n \leq 10$. Pentru $n = 9$ rezultă $a = 4, b = 5$. Pentru $n = 7$ rezultă $b = 5$ și $a = 1$. Pentru $n = 6$ obținem $a = 1, b = 8$, iar pentru $n = 10, b = 0$, iar $a \in \overline{1, 9}$. Celelalte valori ale lui n nu convin.

Deci avem soluțiile: $n = 9, \overline{ab} = 45$; $n = 7, \overline{ab} = 15$; $n = 6, \overline{ab} = 18$; $n = 10, \overline{ab} = \overline{a0}, a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

49. Orice pătrat perfect se termină într-una din cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9. Numerele de forma $5n + 2$ se termină în cifrele 2 sau 7, iar cele de forma $5n + 3$ în 3 sau 8. Deci niciunul dintre acestea nu va fi pătrat perfect.

50. Într-adevăr, fracția se mai poate scrie: $F = \frac{n(n-1)+2}{n(n+1)+2}$ și dacă ținem cont de faptul că pro-

dusul a două numere întregi consecutive este par, rezultă că fracția se va simplifica prin 2.

51. Într-adevăr, $5^{n+3} \cdot 2^n - 125 = 5^3(5^n \cdot 2^n - 1) = 125 \cdot (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10 + 1) =$
 $=$ multiplu de $125 \cdot 9 =$ multiplu de 1125.

52. Notăm cu S suprafața terenului agricol; remarcăm că: $\frac{S}{2} + 50$ ha s-au cultivat cu grâu;

$\frac{1}{2} \left(\frac{S}{2} - 50 \right) + 50 = \frac{S}{4} + 25$ ha cultivate cu porumb; $\frac{1}{2} \left[S - \left(\frac{S}{2} + 50 \right) - \left(\frac{S}{4} + 25 \right) \right] + 50 = \frac{S}{8} + \frac{25}{2}$ ha

cu cartofi. În acest fel, întreaga suprafață a fost cultivată; $\frac{S}{2} + 50 + \frac{S}{4} + 25 + \frac{S}{8} + \frac{25}{2} = S$. De

unde $S = 700$ ha.

53. Media proporțională a numerelor 60 și x este $\sqrt{60x} = 2\sqrt{15x}$, despre care știm că este un număr natural. Pentru aceasta trebuie ca $15x$ să fie pătrat perfect sau $x = 15k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Deci

$\sqrt{60x} = 2 \cdot 15k = 30k < 100$. Acest lucru este posibil numai pentru $k \in \{1, 2, 3\}$. Pentru $k = 1$ rezultă $x = 15$, iar pentru $k = 2$, avem $x = 60$ pentru $k = 3 \Rightarrow x = 135$.

54. Efectuând calculele, avem:
$$\frac{x + \frac{12,1}{11}}{\frac{51}{x - \frac{90}{90}}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{9(10x+11)}{90x-51} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 6(10x+11) = 90x-51 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 30x = 117 \Leftrightarrow x = 3,9$.

55. Notăm cu r valoarea comună a celor trei rapoarte. Deci $r^3 = \frac{abc}{3 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{576}{3 \cdot 4 \cdot 6} = 8 \Rightarrow r = 2$.

De aici $\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = 6$; $\frac{b}{4} = 2 \Rightarrow b = 8$; $\frac{c}{6} = 2 \Rightarrow c = 12$.

56. Într-adevăr, putem scrie:
$$x = \frac{2a}{a+b+c} = \frac{5b}{a+b+c} = \frac{9c}{a+b+c} = \frac{90a+90b+90c}{(45+18+10)(a+b+c)} =$$

$$= \frac{90(a+b+c)}{73(a+b+c)} = \frac{90}{73}.$$

57. Putem scrie: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5} = \frac{4x+y}{11}$, deci $x+y = \frac{5x}{2}$; $4x+y = \frac{11x}{2}$. Înlocuind, obținem:

$$\frac{11x}{2} + \frac{25x}{2} = 24 \cdot 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ și apoi } y = 6.$$

58. Deoarece partea dreaptă trebuie să fie pozitivă, înseamnă că $p < q$. Scriind relația sub formă: $5^{p+1} + 3 = 2 \cdot 5^p(5^{q-p} - 1)$ rezultă $p = 0$, deoarece partea stângă nu se divide la 5. În acest caz, relația devine: $5 + 3 = 2(5^q - 1)$ sau $4 = 5^q - 1$; $5^q = 5$; $q = 1$.

59. Dacă ar exista un astfel de număr N , atunci ar exista numerele naturale m și n , astfel încât să avem: $N = 10m + 3 = 15n + 4$ sau $10m = 15n + 1$, adică $5(2m - 3n) = 1$, relație care arată că produsul a două numere întregi, dintre care cel puțin unul este diferit de ± 1 , este 1. Contradicție.

60. Vom utiliza „principiul cutiei”, conform căruia ne putem imagina cele 100 de numere naturale de la 1 la 100 grupate în 10 grămezi, prima conținând numerele de la 1 la 10, a doua numerele de la 11 la 20 etc. Observăm că oricare două numere dintr-o astfel de grămadă au diferența mai mică sau egală cu 9. Pentru a doua chestiune, vom grupa numerele de la 1 la 100 astfel: în prima grupă numerele care se termină cu 1, în a doua numerele care se termină cu 2 etc. Diferența oricăror două numere dintr-o aceeași grupă va fi divizibilă prin 10. Conform principiului cutiei, pentru a alege 11 numere, două vor fi din aceeași grupă.

61. Din proprietățile șirului de rapoarte egale avem:
$$\frac{-a+b+c}{a} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{a+b-c}{c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} =$$

$$= 1 \Rightarrow -a+b+c = a \Rightarrow b+c = 2a, c+a = 2b; a+b = 2c. \text{ Deci } P = \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{abc} = 8.$$

63. Notăm $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = abc$. Deci $x = \frac{1}{bc}$; $y = \frac{1}{ac}$; $z = \frac{1}{ab}$.

63. a) $\frac{a}{4} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a = 2b$. Înlocuim și astfel (I) devine: $\frac{2}{3} < \frac{4}{5} < \frac{8}{9}$ care este adevărată; b) Facem

substituția $b = ak, k > 0$ obținem: $\frac{1}{1+k} < \frac{1}{1+k^2} < \frac{1}{1+k^3} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - k < 0 \\ k^2(k-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k < 1 \Leftrightarrow 0 < b < a$.

65. $S_1 = 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + \dots + 33 + 33 + 33 = 3(1 + 2 + \dots + 33) = 3[(1 + 33) + (2 + 32) + \dots + (3 + 31) + \dots + (16 + 18) + 17] = 3(16 \cdot 34 + 17) = 1683$; $S_2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + \dots + 24 + 24 + 24 + 24 + 25 + 25 + 25 + 25 = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 25) - 25 = 1275$.

GEOMETRIE PLANĂ

1. Unghiuri. Triunghiuri. Drepte paralele

1. Dacă BE este simetrica lui BD față de BC și BF față de AB , atunci $\sphericalangle CBE \equiv \sphericalangle CBD$ și $\sphericalangle FBA \equiv \sphericalangle ABD$, deci $m(\sphericalangle FBE) = 2 \cdot m(\sphericalangle ABC) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, adică BE și BF sunt în prelungire. Dacă $m(\sphericalangle ABC) = 45^\circ$, atunci $m(\sphericalangle FBE) = 90^\circ$.

2. $\frac{\sphericalangle A}{11} = \frac{\sphericalangle B}{4} = \frac{\sphericalangle C}{3} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{18} = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 110^\circ$;

$m(\sphericalangle B) = 40^\circ$; $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$;

$m(\sphericalangle BAE) = 55^\circ$; $m(\sphericalangle BDE) = 40^\circ + 55^\circ = 95^\circ$;

$m(\sphericalangle DBE) = m(\sphericalangle BED) = \frac{85^\circ}{2} = 42^\circ 30'$; $m(\sphericalangle DEF) = 95^\circ - 90^\circ = 5^\circ$.

Așadar, $m(\sphericalangle BEF) = 42^\circ 30' + 5^\circ = 47^\circ 30'$.

3. $m(\sphericalangle OBA) = m(\sphericalangle OAB) = 15^\circ$. Triunghiurile OAC și OBC sunt isoscele, deci $m(\sphericalangle COB) = m(\sphericalangle OBC) = 75^\circ$, iar $m(\sphericalangle ABC) = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ$. Analog $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$, adică ABC este triunghi echilateral.

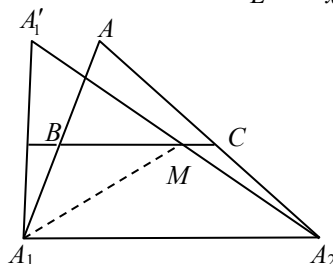
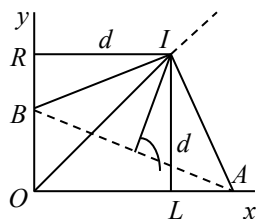
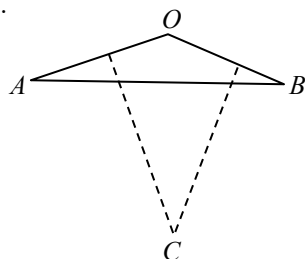
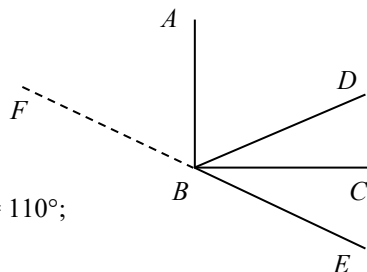
4. $[BI] \equiv [IA]$, deoarece se află pe mediatoarea segmentului BA ; $[IR] \equiv [IL]$, deoarece I se află pe bisectoarea $\sphericalangle AOB$; $\triangle ILA \equiv \triangle RIB$ (triunghiuri dreptunghice) $\Rightarrow [LA] \equiv [BR]$; $[OR] \equiv [IR] \equiv [OL] \equiv [IL] \Rightarrow OA + OB = OL + LA + OR - BR = OL + OR = 2d$.

5. Fie A'_1 simetricul lui A_1 față de dreapta BC . Dreapta A'_1A_2 intersectează pe BC în M , care este punctul de minim.

Într-adevăr, pentru orice alt punct $N \in BC$, vom avea:
 $A_1N + NA_2 = A'_1N + NA_2 > A'_1M + MA_2 = A_1M + MA_2$.

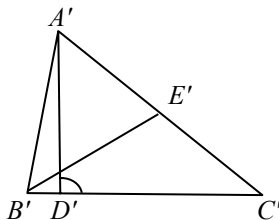
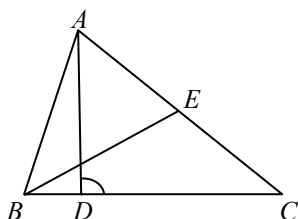
6. Avem: $\frac{\sphericalangle A}{5} = \frac{\sphericalangle B}{12} = \frac{\sphericalangle C}{13} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{18} = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ$.

De unde $m(\sphericalangle A) = 50^\circ$; $m(\sphericalangle B) = 120^\circ$; $m(\sphericalangle C) = 130^\circ$;
 $m(\sphericalangle D) = 60^\circ$.



7. Într-adevăr, $\frac{\sphericalangle A}{1} = \frac{\sphericalangle B}{2} = \frac{\sphericalangle C}{3} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{6} = \frac{180^\circ}{6} = 30 \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 30^\circ; m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$.

8. a) În primul rând rezultă egalitatea triunghiurilor dreptunghice ABD și $A'B'D'$, de unde rezultă $BD = B'D'$ și apoi egalitatea triunghiurilor ADC și $A'D'C'$ și deci $DC = D'C'$, de unde $BC = B'C'$ și apoi egalitatea triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.



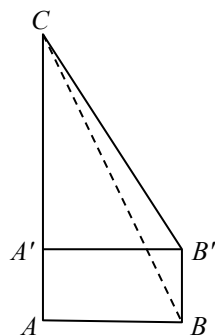
b) Dacă $AC = A'C' \Rightarrow AE = A'E'$, deci egalitatea triunghiurilor ABE și $A'B'E'$. De aici rezultă $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle A'E'B')$ și deci $m(\sphericalangle BEC) = m(\sphericalangle B'E'C')$. De aici rezultă egalitatea triunghiurilor BEC și $B'E'C'$ (LUL) și $BC = B'C'$, deci și egalitatea triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.

9. Fie ABC , astfel încât $m(\sphericalangle C) < 30^\circ$. Luăm $A'B'$ paralel și egal cu AB , astfel încât $m(\sphericalangle A'CB') = 30^\circ$.

Atunci $CB' = 2A'B' = 2AB$. Dar $CB' < CB$, deci $CB > 2AB$ și reciproc.

10. Fie BE și CF perpendicularele duse din B și C pe semidreapta AM . Triunghiurile ABE și AFC sunt asemenea.

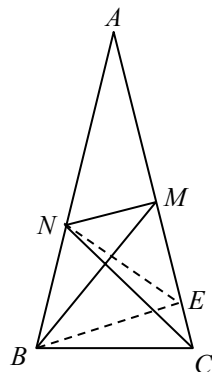
Așadar, $AB < AC \Leftrightarrow AE < AF$, deci $E \in (AM)$ și $M \in (AF)$, $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle ABE) + m(\sphericalangle EBM) = m(\sphericalangle ACF) + m(\sphericalangle MCF) > m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle MCF)$, de unde $m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle C)$ și reciproc.



11. Ducem BE ($E \in AC$), astfel încât $m(\sphericalangle CBE) = 20^\circ$.

Deoarece triunghiurile NBC și EBC sunt isoscele, rezultă că NBE este echilateral; de asemenea, triunghiul MBE rezultă isoscel, deci și NME este isoscel cu baza MN și $m(\sphericalangle NEM) = 40^\circ$, deci $m(\sphericalangle ENM) = 70^\circ$.

Așadar, $m(\sphericalangle ANM) = 50^\circ$.



12. Din faptul că $AF \parallel BC$ rezultă că triunghiurile AOF și BOC sunt asemenea, deci:

$\frac{OF}{OB} = \frac{AO}{OC}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor BOE și AOD avem: $\frac{BO}{OD} = \frac{OE}{AO}$. Ținând

cont de aceste relații, rezultă: $OF \cdot OC = OE \cdot OD \Leftrightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OD}$ și conform cu reciproca teoremei lui Thales, rezultă $EF \parallel CD$.

13. Să constatăm, pentru început, congruența triunghiurilor: ABN , BCP și AMC (criteriul LUL). De aici rezultă: $m(\angle BAN) = m(\angle PBC) = m(\angle ACM)$. În continuare, triunghiurile ABN și BFN sunt asemenea (au $\angle ANB$ comun și $m(\angle BAN) = m(\angle FBN)$). De aici rezultă că $m(\angle BFN) = m(\angle ABN) = 60^\circ$. Analog se arată că și unghiurile G și E au 60° .

14. Prelungim în segmentul CE cu $[EF] \equiv [CE]$. În acest fel triunghiul AFD devine echilateral, întrucât $m(\angle FAD) = 60^\circ$, iar $AF = AD = 3a$, deci $FD = 3a$. De aici rezultă că triunghiurile ACD și EFD sunt congruente, deoarece $AD = FD = 3a$; $AC = EF = a$ și $m(\angle CAD) = m(\angle EFD) = 60^\circ$ (criteriul LUL), deci $CD = ED$.

15. $m(\angle CEO) = m(\angle AEC') = 90^\circ - m(\angle EAC') = 60^\circ$;
 $m(\angle EHO) = m(\angle B'HC) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
 Triunghiul EHO , având două unghiuri de 60° , este echilateral.

16. Fie D proiecția lui A pe BC . Triunghiurile FCD și AEC sunt asemenea, deoarece sunt dreptunghice și $\angle DCF \equiv \angle FCA$. De aici rezultă că $\angle CFD \equiv \angle AEC$ sau $\angle AFE \equiv \angle AEF$, adică triunghiul AEF este isoscel.

17. Fie CC' înălțimea dusă din C pe BE .
 $m(\angle FCC') = 60^\circ + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, deci FC și CC' sunt în prelungire, dar $CC' \perp BE \Rightarrow FC \perp BE$.
 În mod analog se arată că și $CE \perp DF$.

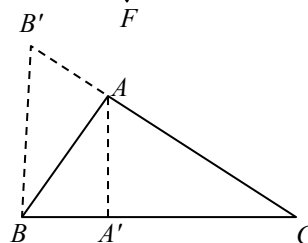
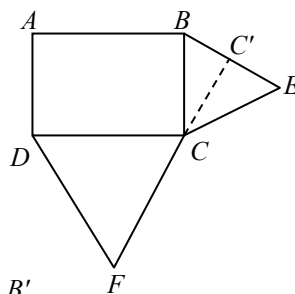
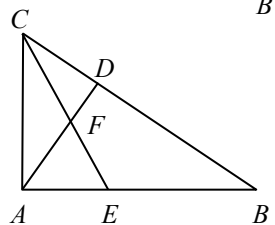
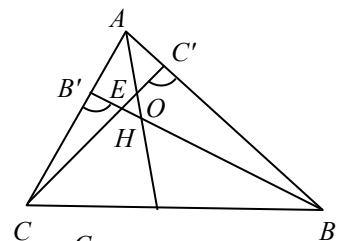
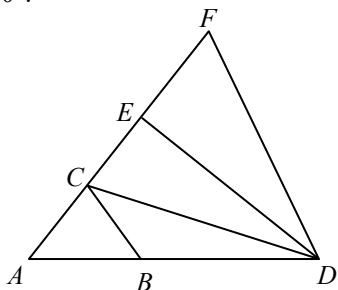
18. Triunghiurile ABA' și ABC sunt asemenea, deci:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AA'}{AC} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{AA'}{b} \Leftrightarrow AA' = \frac{bc}{a}. \text{ În mod analog,}$$

$$\triangle CAA' \sim \triangle CB'B: \frac{AA'}{BB'} = \frac{CA'}{CB}, \text{ în care } CA' \text{ se scoate din}$$

$$\text{teorema catetei: } b^2 = a \cdot CA' \Rightarrow CA' = \frac{b^2}{a}. \text{ Atunci } BB' =$$

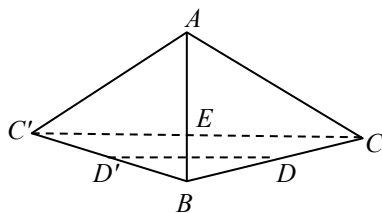
$$= \frac{AA' \cdot BC}{CA'} = \frac{bc}{a} \cdot a \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{ac}{b}.$$



La fel se arată că $CC' = \frac{ab}{c}$.

19. În triunghiul BCC' , DD' este linie mijlocie, deci:

$$DD' = \frac{1}{2} CC' = CE + EC' < CA + AE < CA + AB.$$



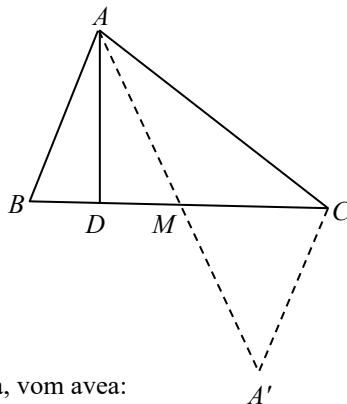
20. Presupunem problema rezolvată.

Prelungim AM cu $MA' = AM = m$.

Atunci $\angle ACA' = 180^\circ - u$.

Construcția are loc astfel:

Pe dreapta BC ca suport, fixăm un punct D în care ridicăm perpendiculara $AD = h$. Cu vârful în A , descriem cercul de rază m care taie dreapta BC în M (și M'); prelungim AM cu $A'M = m$, deci $AA' = 2m$ și construim arcul capabil de $180^\circ - u$ care taie dreapta BC în C . Paralela prin A' la AB taie BC în C .



21. Ducem ME și NF paralele la AA' . Din triunghiuri asemenea, vom avea:

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BE}{BA'} = \frac{ME}{AA'} \text{ și } \frac{NC}{AC} = \frac{CF}{CA'} = \frac{NF}{AA'} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{BE}{BA'} \cdot \frac{CA'}{CF} \text{ și ținând cont de teorema bisecto-$$

rei: $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C}{A'B}$ rezultă $[BE] = [CF]$. Acest lucru implică $[EQ] = [QF]$, deci PQ este linie mij-

locie în trapezul $MNFE$, deci $PQ \parallel ME \parallel AA'$.

22. Într-adevăr, dacă bisectoarea AD , înălțimea BE și mediatoarea care trece prin F , mijlocul lui AB , sunt concurente într-un punct O , atunci triunghiul AOB este isoscel și $m(\angle ABO) = m(\angle BAO) = \frac{1}{2} m(\angle A)$, deci în triunghiul dreptunghic AEB , $\frac{3}{2} m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle A) = 60^\circ$.

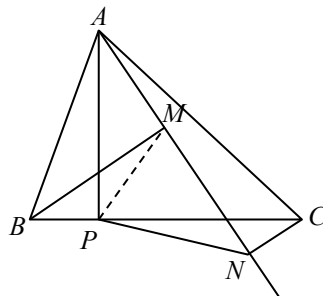
$$= m(\angle BAO) = \frac{1}{2} m(\angle A), \text{ deci în triunghiul dreptunghic } AEB, \frac{3}{2} m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle A) = 60^\circ.$$

Reciproc, dacă $m(\angle A) = 60^\circ$, fie $O = AD \cap BE$, $m(\angle ABO) = 30^\circ$, $m(\angle BAO) = 30^\circ$ rezultă că triunghiul AOB este isoscel și deci mediatoarea lui AB trece prin O .

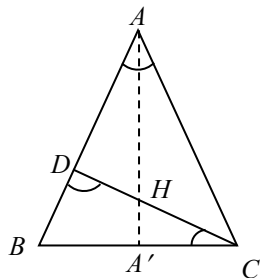
23. În triunghiul BDF , EF este înălțime. Pe de altă parte, triunghiul ABF rezultă dreptunghic isoscel, deci $FB \perp AB$, adică și $DC \perp FB$. De aici rezultă că DC este a doua înălțime în triunghiul BDF , a treia înălțime fiind deci BC , adică $BC \perp DF$.

24. Deoarece $\angle APC \equiv \angle ANC = 90^\circ$, patrulaterul $APNC$ este inscriptibil, deci și $\angle PNM \equiv \angle PCA$.

Pe de altă parte, $\angle APB \equiv \angle AMB = 90^\circ$, deci patrulaterul $AMPB$ este inscriptibil, de unde $\angle PMN \equiv \angle ABC$ (au același suplement $\angle AMP$), de unde rezultă că triunghiurile ABC și MNP sunt congruente.



25. a) Triunghiurile ABA' și CDB sunt asemenea, având, prin ipoteză, câte două unghiuri congruente: $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle BAA'$, iar $\sphericalangle ABC$ este comun. De aici rezultă că și $\sphericalangle AA'B \equiv \sphericalangle BDC = 90^\circ$. Deci AA' este bisectoare și înălțime în triunghiul ABC , adică ABC este triunghi isoscel.
b) H este ortocentrul triunghiului ABC , adică BH este a treia înălțime, deci $BH \perp AC$.



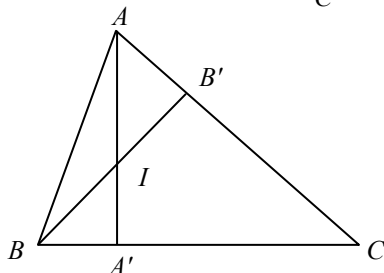
26. În triunghiul ABC aplicăm teorema bisectoarei:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{BA'}{BA' + A'C} = \frac{c}{b+c} \Leftrightarrow BA' = \frac{ac}{b+c}.$$

În triunghiul ABA' , BI este bisectoare, deci:

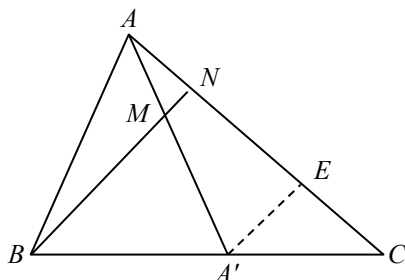
$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a} > 1 \Leftrightarrow AI > IA' \text{ și analoagele}$$

care se demonstrează la fel.

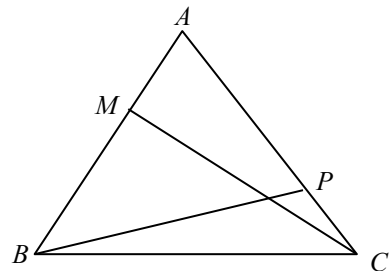


27. Fie $A'E \parallel BN$, $E \in NC$. De aici rezultă $[NE] \equiv [EC]$ ($A'E$ linie mijlocie în triunghiul BNC). În continuare,

$$\begin{aligned} \text{vom avea: } \frac{AM}{MA'} &= \frac{k}{1} = \frac{AN}{NE} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{AN}{2NE} = \frac{AN}{NE + EC} = \\ &= \frac{AN}{NC}. \end{aligned}$$



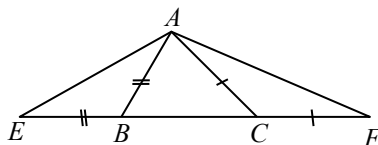
28. Triunghiurile AMC și BPC sunt congruente ($AM = PC$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $AC = BC$), deci $\sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle PBC$, dar $\sphericalangle MCA + \sphericalangle MCB = 60^\circ$, deci $\sphericalangle PBC + \sphericalangle MCB = 60^\circ$.



$$\begin{aligned} 29. \quad &2a(p-c) + 2b(p-a) + 2c(p-b) = \\ &= 2ap + 2bp + 2cp - 2ac - 2bc - 2ab = \\ &= 2p(a+b+c) - 2ab - 2ac - 2bc = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

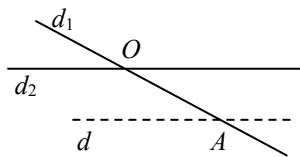
30. Presupunem problema rezolvată și prelungim latura BC cu $CF = CA$ și $BE = BA$. Triunghiurile ABE și ACF sunt isoscele, cu unghiurile de la bază de $\frac{B}{2}$ și $\frac{C}{2}$.

Așadar, triunghiul AEF are baza EF dată, perimetrul triunghiului ABC și unghiurile bazei EF cunoscute, respectiv $\frac{B}{2}$ și $\frac{C}{2}$, deci poate fi construit.

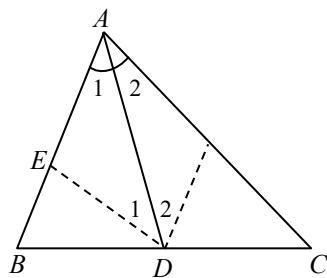


Ducând semidreptele AB și AC care formează unghiuri de măsuri $\frac{B}{2}$ și respectiv $\frac{C}{2}$ cu AE și AF , rezultă astfel triunghiul ABC .

31. Să presupunem prin absurd că d_1 și d_2 nu sunt paralele. Fie $\{O\} = d_1 \cap d_2$ și $A \in d_1$ un punct arbitrar $A \neq O$. Ducem prin A o dreaptă d paralelă la d_2 . Deci $d \cap d_1 \neq \emptyset$ și $d \parallel d_2$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci d_1 și d_2 nu se pot intersecta. De aici rezultă că $d_1 \parallel d_2$.



32. Patrulaterul $AEDF$ este paralelogram deoarece, prin ipoteză, laturile opuse sunt paralele. Pe de altă parte, $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle D_2$ și $\sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle D_1$ (ca unghiuri alterne interne) și cum $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ și $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$, deci $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \sphericalangle D_1 = \sphericalangle D_2$, deci triunghiurile AED și AFD sunt isoscele și patrulaterul $AEDF$ este astfel romb, întrucât are toate laturile congruente.



33. Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiurile AMB și CMB rezultă:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{MB} \text{ și } \frac{QC}{QB} = \frac{MC}{MB} \quad (1).$$

Dacă M este mijlocul lui AC , rezultă $AM = MC$, de unde $\frac{AP}{PB} = \frac{QC}{QB}$ și conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă $PQ \parallel AC$.

Reciproc, dacă $PQ \parallel AC$, rezultă $\frac{AP}{PB} = \frac{QC}{QB}$ și ținând cont de relațiile (1), rezultă

$$AM = MC.$$

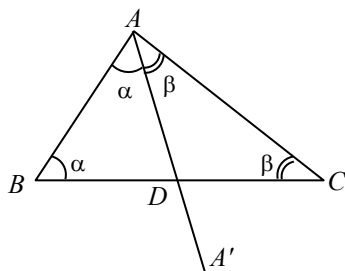
34. Se știe că $m(\sphericalangle A) \leq 90^\circ \Leftrightarrow AM \geq BM = MC$. Din teorema bisectoarei aplicată în triunghiurile ABM și AMC rezultă: $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB} > 1 \Rightarrow NA > NB$; analog $PA > PC$.

Conform problemei anterioare rezultă $m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle MAN)$ și $m(\sphericalangle C) > m(\sphericalangle MAC)$, de unde $m(\sphericalangle MNA) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle BMN) > m(\sphericalangle MAN) + m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle BMN)$. Deci $m(\sphericalangle MNA) > 90^\circ$; analog $m(\sphericalangle MPA) > 90^\circ$. În patrulaterul $ANMP$ unghiurile N și P sunt obtuze, deci $NP < AM$. Dacă $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, inegalitățile devin egalități.

35. a) Dacă $\sphericalangle A = 90^\circ$, prelungim AD cu $DAA' = AD$ și figura $ABA'C$ este un paralelogram, deoarece diagonalele se taie în părți egale, care are un unghi drept, deci dreptunghic, deci diagonalele AA' și BC sunt congruente, deci $AD = \frac{BC}{2}$. Reciproc, dacă $AD = BD = DC$,

avem două triunghiuri isoscele: ABD și ADC cu unghiurile de la baze egale cu α și respectiv β .

$$\text{Deci } 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 90^\circ.$$



b) Dacă $AD > \frac{BC}{2}$, luăm A' pe AD , astfel încât

$$AD' = \frac{BC}{2} \Rightarrow \sphericalangle BA'C = 90^\circ. \text{ Dar } \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BA'D + \sphericalangle DA'C > \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \sphericalangle A \Rightarrow \sphericalangle A < 90^\circ.$$

c) Dacă $AD < \frac{BC}{2}$, luăm punctul A' pe prelungirea lui AD , de aceeași parte cu A față de BC , astfel încât $A'D = \frac{BC}{2}$. De aici rezultă că $\sphericalangle BA'C = 90^\circ$, dar $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC > \sphericalangle BA'D + \sphericalangle DA'C = \sphericalangle A' = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle A > 90^\circ$.

Și acum să observăm conform echivalenței logice:

$(P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$ implicația b) „ $\Rightarrow$ ”, adică

$$m(\sphericalangle A) < 90^\circ \Rightarrow AD > \frac{BC}{2} \text{ este echivalentă cu } AD \leq \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) \geq 90^\circ, \text{ care tocmai a fost}$$

demonstrată. Analog c) „ $\Rightarrow$ ” este echivalentă cu $AD \geq \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) \leq 90^\circ$.

36. Fie E mijlocul lui AM . În triunghiurile dreptunghice AMN și AMP , NE și respectiv PE sunt mediane, deci $NE = \frac{AM}{2} = PE$. Deci $NP \leq NE + EP = AM$. Egalitatea are

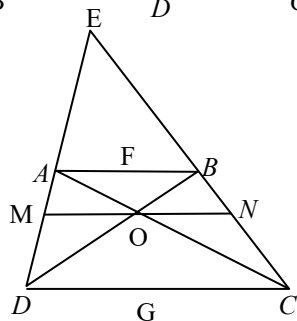
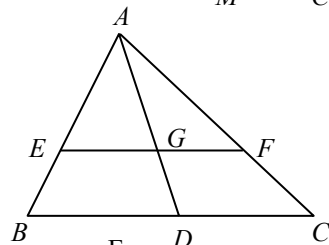
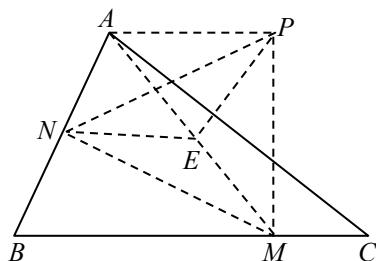
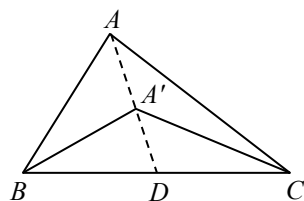
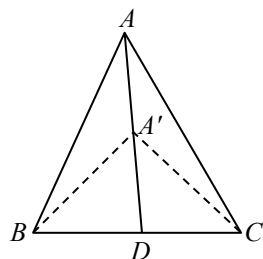
loc dacă și numai dacă punctele N, E, P sunt coliniare, adică atunci când patrulaterul $ANMP$ este pătrat. Acest lucru se întâmplă atunci când $m(\sphericalangle NAP) = 90^\circ$, adică $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$ și $MB = AB$.

37. Într-adevăr, din triunghiurile asemenea AEG și ABD și apoi AGF și ADC , pe de altă parte, deducem:

$$\frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC} \text{ și cum } BD = DC \Rightarrow EG = GF.$$

38. Considerăm triunghiul EDC și mediana EG , deci $F \in EG$. În mod analog $O \in EG$ (se știe că o paralelă MN prin O la bazele trapezului, este împărțită de O în două părți egale). Pentru aceasta, este suficient să observăm că:

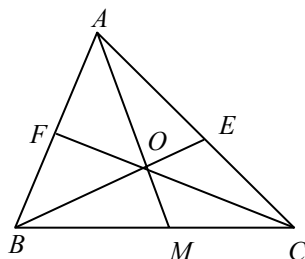
$$\frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow [MO] = [ON].$$



39. Demonstrație prin reducere la absurd.

Să presupunem că EF și PO nu sunt paralele. Ducem $FE' \parallel BC$ ($E' \in AC$). $FE'CB$, fiind trapez, rezultă că M , O' , A sunt coliniare, deci $O' \in AM$. Dar $O \in AM$. Însă $O = EB \cap FC$; $O' = BE' \cap FC \Rightarrow O, O' \in FC \cap AM$, adică $O \equiv O'$, $E \equiv E'$ și $EF \parallel BC$.

Reciproc, dacă $EF \parallel BC$, patrulaterul $EFBC$ este trapez și se aplică problema precedentă.

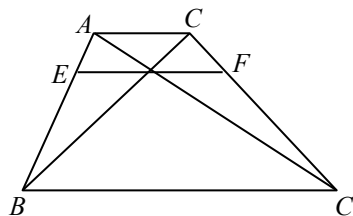


40. $\frac{EO}{AB} = \frac{DE}{DA}$; $\frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD}$. Deci:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{EO} \left(\frac{DE}{DA} + \frac{AE}{AD} \right) = \frac{1}{EO}.$$

41. Avem succesiv: $\frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC}$.

42. $\frac{d(O, AD)}{d(O, BC)} = \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \text{ct.}$ Locul geometric al punctului O este o paralelă la baze.

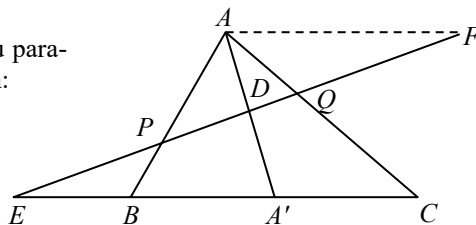


43. Fie $\{E\} = PQ \cap BC$ și F intersecția lui PQ cu paralela prin A la BC . Din triunghiuri asemenea, găsim:

$$\frac{AD}{DA'} = \frac{m}{n-m} = \frac{AF}{EB + \frac{a}{2}};$$

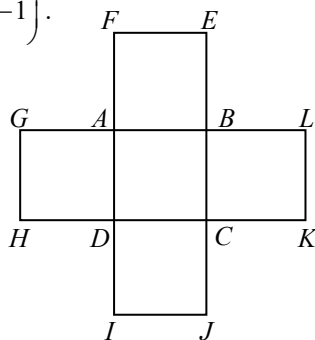
$$\frac{QC}{QA} = \frac{EB+a}{AF} \text{ și } \frac{BP}{PA} = \frac{EB}{AF}, \text{ deci:}$$

$$\frac{BP}{PA} + \frac{QC}{QA} = \frac{EB}{AF} + \frac{EB+a}{AF} = \frac{2(EB+a/2)}{AF} = \frac{2(n-m)}{m} = 2 \left(\frac{n}{m} - 1 \right).$$



44. Fie $ABCD$ pătratul de latură 1 pe care construim în exterior pătratele $ABEF$, $ADHG$, $DCJI$, $CBLK$.

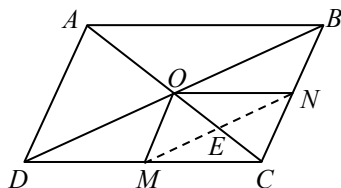
Locul geometric căutat este format din reuniunea segmentelor EF , GH , IJ , KL .



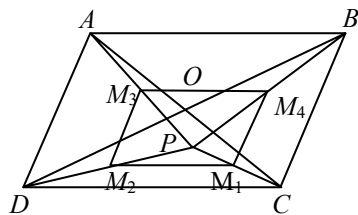
45. Fie $\{E\} = AC \cap MN$. Dacă O este centrul de greutate al triunghiului AMN , rezultă că AE este mediană, deci $ME = EN$.

Pe de altă parte, MN este linie mijlocie în triunghiul DBC , deci $OE = EC$, adică patrulaterul $OMNC$ este paralelogram. Dar $OM \parallel AD$, $OM \parallel BC \Rightarrow AD \parallel BC$.

Analog $ON \parallel DC$, $ON \parallel AB \Rightarrow AB \parallel CD$. Deci $ABCD$ este paralelogram.



46. Dreptele AM_1 și CM_3 sunt mediane în triunghiul APC și trec prin punctul care împarte mediana OP în raportul $\frac{1}{3}$. De asemenea, dreptele BM_2 și DM_4 sunt mediane în triunghiul BDP și trec prin același punct. Deci sunt concurente.



47. a) Se observă că AH este a treia înălțime a triunghiului ABC , deci $AH \perp BC$.

b) Din faptul că $C'A \perp AC$ și $BD \perp AC$, unde $D = AC \cap BB'$, rezultă $C'A \parallel BB'$ și analog $AB' \parallel C'H$, deci $AB'HC'$ este paralelogram, $m(\angle HAB') = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A)$;

$m(\angle HBC) = m(\angle HCB) = \frac{1}{2}m(\angle A)$. Deci $m(\angle AHD) = \frac{1}{2}m(\angle C'HB') = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle A)) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A)$. Așadar, triunghiul $AB'H$ este isoscel, iar $AB'HC'$ este romb.

c) Rombul $AB'HC'$, având diagonalele perpendiculare, rezultă $C'B' \perp AH$, $AH \perp BC$, deci $C'B' \parallel BC$.

48. Ținem cont de asemănarea triunghiurilor NAF cu FBD și MAE cu DEC și calculăm produsul:

$$\mathcal{P} = \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{NA}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{AM} = \frac{AN}{AM}.$$

Conform teoremei lui Ceva, dreptele AD , BE și CF sunt concurente dacă și numai dacă $\mathcal{P} = 1$, ceea ce este echivalent cu $AM = AN$.

49. a) În triunghiul ABD , MO este linie mijlocie, deci $MO \parallel AB$ și $MO = \frac{1}{2}AB$.

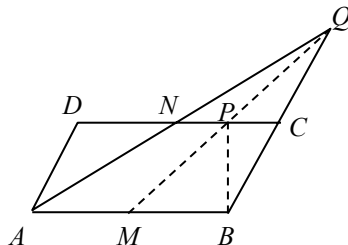
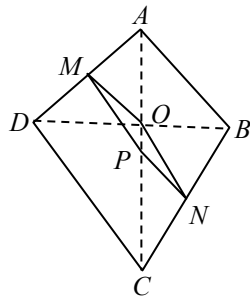
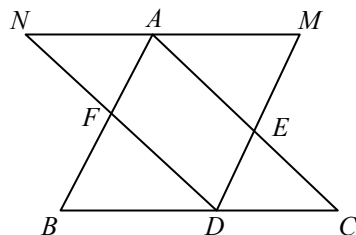
Analog, NP este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $NP \parallel AB$ și $NP = \frac{1}{2}AB$. De unde, $OM \parallel NP$ și $MO = NP$,

adică $MONP$ este paralelogram.

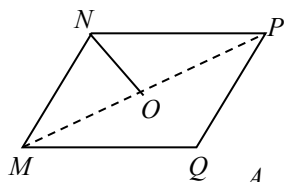
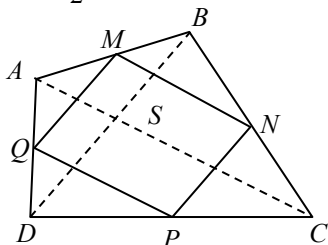
b) Deoarece $MO \parallel AB$ și $MP \parallel DC$, rezultă că $\angle AMO = 90^\circ$, iar $\angle AMP = \angle ADC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$. Deci $\angle OMP = 15^\circ$, iar $\angle MPN = 165^\circ$.

50. Din asemănare obținem $\frac{NP}{AM} = \frac{QP}{QM} = \frac{PC}{MB}$ și cum

$[AM] \equiv [MB] \equiv [BC]$ rezultă $NP = PC = \frac{1}{2}BC$. Deci $BC = 2PC$ și $m(\angle C) = 60^\circ$. De aici rezultă (a se vedea o problemă anterioară) că triunghiul BPC este dreptunghic în P , deci $BP \perp PC$.

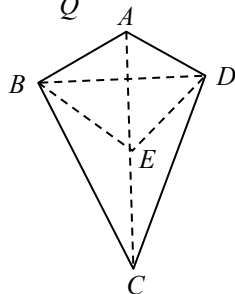


51. Patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram, deoarece are laturile opuse paralele cu diagonalele AC și BD . Deci $\sphericalangle ASD \equiv \sphericalangle MNP$. Afirmația noastră revine la a arăta că $\sphericalangle N > 90^\circ \Leftrightarrow MP > NQ$ sau $\sphericalangle N > 90^\circ \Leftrightarrow \frac{MP}{2} > NO$, fapt demonstrat într-o problemă anterioară.

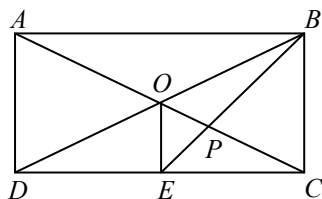


52. Fie E mijlocul lui AC . Triunghiurile ABC și ADC sunt obtuzunghice în care BE și respectiv DE sunt mediane. În acest caz se știe că $BE < \frac{AC}{2}$ și $DE < \frac{AC}{2}$.

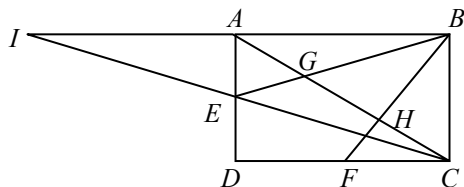
Rezultă $BD < BE + DE < \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} = AC$.



53. Întrucât $m(\sphericalangle DBE) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle ABE) = 45^\circ$ rezultă $m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ$ și $\sphericalangle ADB = 60^\circ$. Triunghiurile AOD și BOC sunt astfel triunghiuri echilaterale, deci $[OC] \equiv [BC]$. Dar triunghiul BCE este dreptunghic isoscel, deci $[BC] \equiv [EC]$; rezultă $[OC] \equiv [EC]$, adică triunghiul OCE este isoscel. Avem $m(\sphericalangle BPC) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$, deci $m(\sphericalangle OPE) = 75^\circ$, iar $m(\sphericalangle EOP) = 75^\circ$ pentru că triunghiul isoscel OEC are vârful de 30° și unghiurile de la bază de câte 75° .

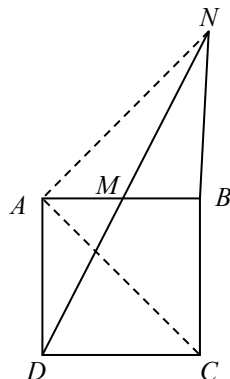


54. Fie G și H punctele de intersecție ale lui BE și BF cu AC ; EC intersectează pe AB în I . În triunghiul IBC , AE este linie mijlocie, deci A este mijlocul lui IB . Asta înseamnă că AC este mediană în triunghiul IBC , iar BE a doua mediană, iar G va fi centrul de greutate al triunghiului IBC .

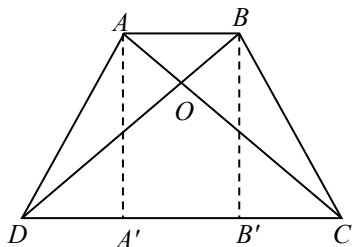


Deci $AG = \frac{1}{3}AC$. Analog se arată că HC este o treime din AC .

55. Fie $\{N'\} = DM \cap BC$. Dacă arătăm că $\sphericalangle N'AC$ este drept, atunci $N' = N$. Într-adevăr, MB fiind linie mijlocie în triunghiul $N'DC$, $\frac{MB}{DC} = \frac{N'B}{N'C} = \frac{1}{2} \Rightarrow N'B = BC = AB$ și deci triunghiul NAC este dreptunghic, deoarece mediana $AB = \frac{1}{2}NC$.

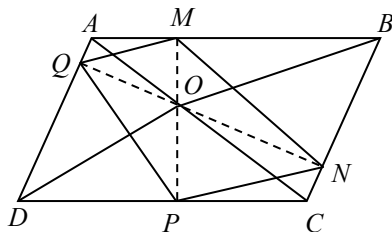


56. Triunghiul $BB'D$ este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle BDB') = 45^\circ$. Analog în triunghiul $AA'C$, de asemenea dreptunghic și isoscel, $m(\angle ACA') = 45^\circ$. Dacă O este intersecția diagonalelor, atunci $m(\angle DOC) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$.



57. Să observăm întâi că OM și OP sunt în prelungire; de asemenea, ON și OQ . Dreptele MP și NQ împart paralelogramul $ABCD$ în patru patrulatere inscriptibile: $AMOQ$, $MBNO$, $ONCP$ și $OPDQ$ (având câte două unghiuri opuse drepte). Avem: $\angle MQO \equiv \angle MAO$; $\angle OQP \equiv \angle ODP$; $\angle QPO \equiv \angle QDO$ și $\angle OPN \equiv \angle OCN \equiv \angle OAQ$, de unde, prin sumare, obținem:

$m(\angle MQP) + m(\angle QPN) = m(\angle BAD) + m(\angle ADC) = 180^\circ$, adică dreptele MQ și PN sunt paralele, adică $MQPN$ este trapez.



58. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Construim în afara acestuia triunghiul ADE asemenea cu triunghiul ABC , luând $\angle DAE \equiv \angle BAC$ și $\angle ADE \equiv \angle ABC$. Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, de unde $DE = \frac{BC \cdot AD}{AB}$. Pe de altă parte, triunghiurile ACE și ABD

rezultă asemenea, deoarece $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$ și $\angle CAE = \angle BAD$ (cazul II de asemănare). De aici:

$\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$ sau $CE = \frac{AC \cdot BD}{AB}$. Întrucât $CE \leq CD + DE$, rezultă $\frac{AC \cdot BD}{AB} \leq CD + \frac{BC \cdot AD}{AB}$ sau $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (1). Dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, atunci $\angle CDA + \angle CBA = 180^\circ$, deci $\angle CDA + \angle ADE = 180^\circ$, adică: $CE = CD + DE$, iar în (1) avem egalitate.

59. a) Concurența mediatoarelor laturilor este echivalentă cu faptul că punctul de concurență, fiind la egală distanță de vârfuri, coincide cu centrul cercului circumscris.

b) Concurența bisectoarelor unghiurilor este echivalentă cu faptul că punctul de concurență se află la egală distanță de laturile unghiurilor, deci de laturile patrulaterului.

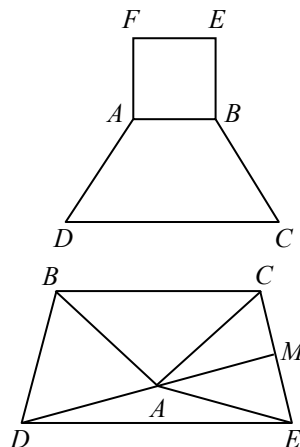
60. Segmentele CE și DE sunt congruente, deoarece fac parte din triunghiurile congruente ADF și BCE , deoarece $AF \equiv BE$, $AD \equiv BC$ și $m(\angle DAB) + m(\angle BAF) = m(\angle CBA) + m(\angle ABE)$, de unde rezultă că:
 $m(\angle DAF) = m(\angle CBD)$ (criteriul L.U.L.).

61. 1) $m(\angle CAM) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$, deci AM bisecatoare și totodată înălțime în triunghiul CAE , deci $AM \perp CE$.

2) $m(\angle DAE) = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 150^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\angle ADE) = 15^\circ$.

$m(\angle DBC) + m(\angle BDE) = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, deci BC și DE sunt paralele, adică $BCDE$ este trapez și cum $BD \equiv BA \equiv AC \equiv CE$, acest trapez este isoscel.



62. Fie E și F mijloacele laturilor AD și BC , iar G mijlocul diagonalei BD . EG este linie mijlocie în triunghiul ABD , deci $EG \parallel AB$ și $EG = \frac{1}{2}AB$.

Analog $GF \parallel DC$ și $GF = \frac{1}{2}DC$.

Deci $EG + GF = \frac{1}{2}(AB + CD) = EF$. De aici rezultă că punctele E , G și F sunt coliniare și $AB \parallel CD$.

63. Din triunghiuri asemenea avem respectiv:

$\frac{OB}{OD} = \frac{OF}{OA}$ și $\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$, de unde, prin înmulțirea celor

două relații, obținem: $\frac{OE}{OD} = \frac{OF}{OC}$. Aceasta relație ne

spune, conform reciprocei teoremei lui Thales, că dreptele EF și CD sunt paralele.

64. Din ipoteză rezultă că $[AF] \equiv [EC]$. De aici rezultă că triunghiurile AFD și BEC sunt congruente ($AD \equiv BC$, $m(\angle DAF) = m(\angle EBC)$ și $[AF] \equiv [EC]$). De unde avem că $m(\angle AFD) = m(\angle BEC)$ și apoi $m(\angle DFC) = m(\angle AEB)$, adică dreptele DF și BE sunt paralele.

65. a) Dacă AC este bisectoarea unghiului A , rezultă, conform figurii, că $m(\angle A_1) = m(\angle A_2) = m(\angle C_1)$, deci

triunghiul ADC este isoscel. Dar $C'B = \frac{1}{2}CB$ (C proiecția lui C pe AB) $\Rightarrow m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle C_1) = m(\angle A_1) = 30^\circ \Rightarrow \angle ACB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

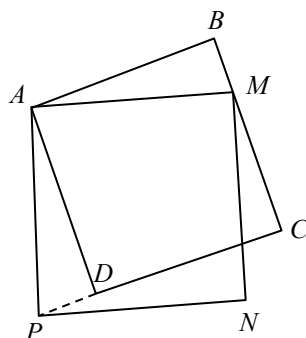
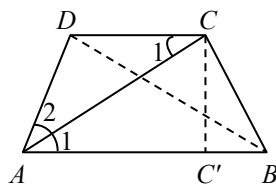
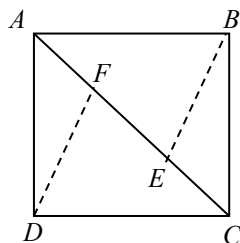
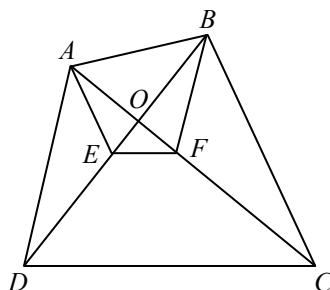
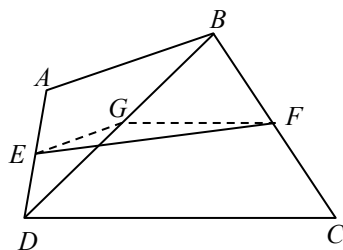
b) Perimetrul trapezului este $5a$.

c) Din asemănarea triunghiurilor AEB și DEC rezultă

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2a}{a} = 2.$$

66. Să observăm că triunghiurile ABM și ADP sunt congruente: $AB \equiv AD$, $AM \equiv AP$ și $\angle BAM \equiv \angle DAP$ (au laturile perpendiculare), deci $\angle ABM = \angle ADP = 90^\circ$, adică punctele P , D , C sunt coliniare și deci P descrie un segment egal cu latura pătratului pe dreapta suport a lui DC .

67. Relația se mai scrie: $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a + b + c)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$, egalitate care are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.



68. Relația se mai scrie: $a^2(b^2 - c^2) = (b^2 - c^2)(b^2 + c^2) \Leftrightarrow (b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c)$ sau $a^2 = b^2 + c^2$.

69. Relația dată este echivalentă cu: $(b - c)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$. Dacă $b - c = 0 \Rightarrow$ triunghi isoscel, iar dacă $b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow$ triunghi dreptunghic.

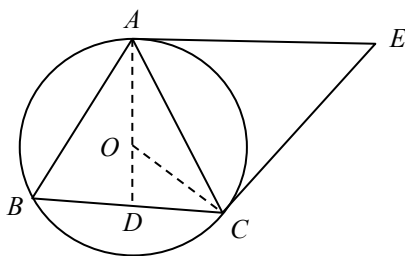
70. Efectuând în (1) suma numărătorilor pe suma numitorilor, obținem că fiecare raport are valoarea $m + 3$. Deci $\frac{(m+1)a+b+c}{a} = m + 3$, de unde $b + c = 2a$ și apoi relațiile analoge

$a + c = 2b$, $a + b = 2c$. Scăzând a doua din prima, obținem: $b - a = 2(a - b)$ sau $3(a - b) = 0$, adică $a = b$. În mod asemănător obținem și că $b = c$. Analog se procedează și cu relația (2).

2. Cercul. Patrulater inscriptibil

$$\begin{aligned} 1. \angle OCB &= \frac{180^\circ - \angle COB}{2} = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - (180^\circ - \angle C'AB) = \angle C'AB - 90^\circ = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle C'O'B - 90^\circ = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C'O'B = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle O'C'B) = \angle O'C'B. \end{aligned}$$

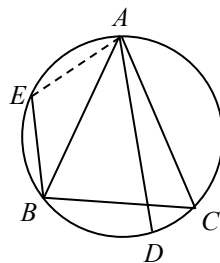
2. Fie $AD \perp BC$, $D \in BC \Rightarrow OD = \frac{BC}{2} = DC$,
 deci $\angle DOC = 45^\circ$, dar $\angle AEC = \angle COD \Rightarrow \angle AEC = 45^\circ$.



3. Deoarece $AD \parallel BE$, rezultă că $\widehat{AE} = \widehat{BD}$.

Deci $\widehat{AE} + \widehat{EB} = \widehat{EB} + \widehat{BD} = \widehat{AC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m(\angle EAD) = m(\angle ADC)$, adică dreptele AE și CD sunt paralele.

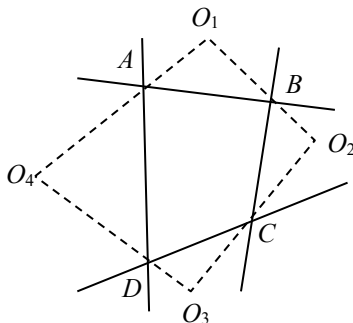


4. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Centrele celor patru cercuri tangente se află la intersecția bisectoarelor exterioare unghiurilor patrulaterului. Să arătăm că acest patrulater este inscriptibil.

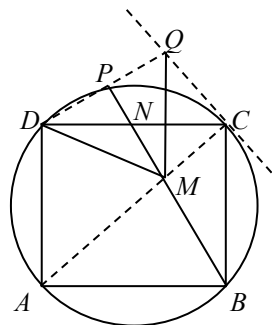
$$\text{Într-adevăr, } \angle O_1 = \frac{180^\circ - \angle A}{2} + \frac{180^\circ - \angle B}{2};$$

$$\angle O_3 = \frac{180^\circ - \angle C}{2} + \frac{180^\circ - \angle D}{2}, \text{ de unde:}$$

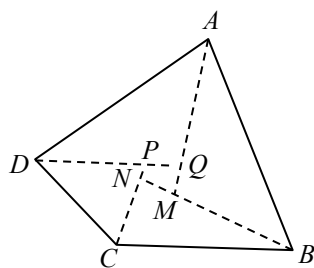
$$\begin{aligned} \angle O_1 + \angle O_3 &= 360^\circ - \frac{\angle A + \angle B + \angle C + \angle D}{2} = \\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$



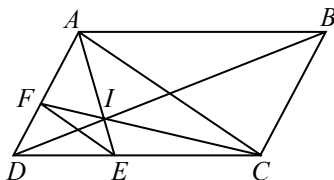
5. $\triangle DCM \equiv \triangle MCB$ (cf. caz L.U.L.), deci $\sphericalangle CDM \equiv \sphericalangle CBM$ și $\sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle CDP$ (subîntind același arc). $\triangle QCD \equiv \triangle DCM$ (cf. caz U.L.U.), deci $DQ \equiv DM$ (1), așadar $\triangle MDQ$ este isoscel. Din (1) $\Rightarrow QC \equiv CM$ și $\sphericalangle CQM \equiv \sphericalangle CMQ$, deci $CN \perp QM \Rightarrow DN$ înălțime în $\triangle DQM$; $MP \perp DQ \Rightarrow MP$ înălțime în $\triangle DQM$; $MP \cap DC = \{N\}$ punctul de intersecție al înălțimilor, deci $QN \perp DM$.



6. Într-adevăr, $m(\sphericalangle NPQ) + m(\sphericalangle NMQ) = m(\sphericalangle PDC) + m(\sphericalangle PCD) + m(\sphericalangle MAB) + m(\sphericalangle MBA) = \frac{1}{2} [m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D)] = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$, adică $ABCD$ este inscriptibil.

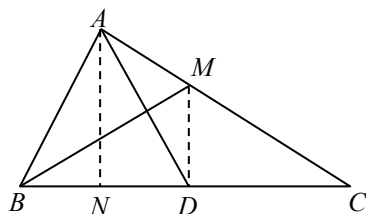


7. Patrulaterul $ABPM$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle ABC$. De asemenea, patrulaterul $APNC$ este inscriptibil, de unde $\sphericalangle PNM \equiv \sphericalangle BCA$. De aici rezultă că triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea.

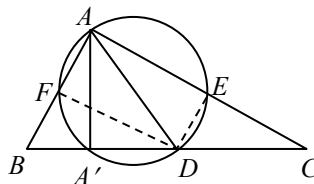


8. a) Patrulaterul $ABCI$, fiind inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle AIC \equiv \sphericalangle FIE = 180^\circ - \sphericalangle B = 180^\circ - \sphericalangle D$, deci $\sphericalangle FIE + \sphericalangle D = 180^\circ$, adică patrulaterul $FIDE$ este inscriptibil.
b) $\sphericalangle IFE \equiv \sphericalangle IDE \equiv \sphericalangle ABI \equiv \sphericalangle ACI$, adică $EF \parallel AC$.

9. Ducem mediatoarea DM , $M \in AC$ și înălțimea AN . Avem: $\sphericalangle BAN + \sphericalangle ABN = 90^\circ$ ($AN \perp BC$); $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABN = 90^\circ$ (din ipoteză) rezultă că: $\sphericalangle BAN \equiv \sphericalangle DAC$; $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle NAC \equiv \sphericalangle DMC \equiv \sphericalangle BMD$. De aici deducem că patrulaterul $ABMD$ este inscriptibil. Cum $\sphericalangle BDM = 90^\circ$, rezultă și $\sphericalangle BAC = 90^\circ$.

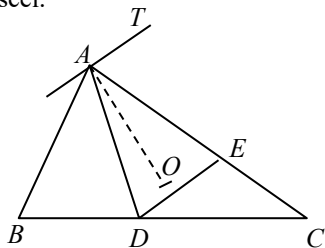


10. Ducem $AA' \perp BC$, $DE \perp AC$ ($E \in AC$) și $DF \perp AB$ ($F \in AB$). Punctele E , A' și D aparțin cercului de diametru AD , întrucât triunghiurile ADE , AFD și $AA'D$ sunt dreptunghice cu ipotenuza AD .



11. Se observă că patrulaterul $BHCA'$ este paralelogram, deoarece $BH \perp AC$, $A'C \perp AC$, deci $BH \parallel A'C$; analog $CH \parallel A'B$. Cum într-un paralelogram diagonalele se taie în părți egale, rezultă că H , M , A' sunt coliniare.

12. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC , $P = AM \cap \mathcal{C}$, $Q = AN \cap \mathcal{C}$. Se observă că $\triangle BMP \equiv \triangle NQC$, deoarece $BM \equiv NC$, $BP \equiv QC$ și $m(\angle MBP) = m(\angle NCQ)$. De aici rezultă că $m(\angle BMP) = m(\angle CNQ)$, deci $m(\angle B) = m(\angle C)$ și ABC rezultă isoscel.

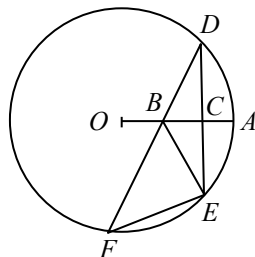


13. Fie AT tangenta în A la cercul ABC .

Cum $AO \perp AT$, este suficient să arătăm că $AT \parallel DE$.

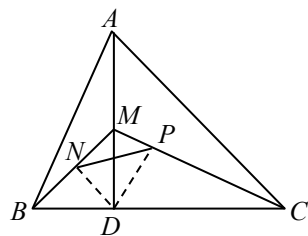
$\angle TAE \equiv \angle ABC$ (au aceeași măsură);

$\angle ABC \equiv \angle AED$ (deoarece triunghiurile ABD și ADE sunt congruente, L.U.L.), deci $\angle TAE \equiv \angle AED$, adică $AT \parallel DE$, de unde rezultă $AO \perp DE$.



14. Patrulaterul $DBEA$ este romb, deoarece are diagonalele mediatoare una alteia. De aici rezultă:

$\angle BDE \equiv \angle EDA \Rightarrow \widehat{EF} = \widehat{AE}$.



15. Patrulaterul $MNDP$ este inscriptibil; $\angle DMP \equiv \angle DNP$ și $\angle NPD \equiv \angle NMD$, de aici rezultă că triunghiul NDP este isoscel dacă și numai dacă MD este bisectoarea unghiului BMC , fapt echivalent cu AD bisectoare pentru $\angle BAC$, care, fiind și înălțime, rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

16. Din triunghiurile asemenea TBA' și TCA deducem:

$\frac{TB}{TA} = \frac{A'B}{AC}$, iar din triunghiurile ATB și $A'TC$: $\frac{TA}{TC} = \frac{AB}{A'C}$. Înmulțind aceste relații, deducem tocmai relația din enunț.

17. Se observă mai întâi că patrulaterul $AMA'N$ este inscriptibil, deoarece $\angle AMA' = \angle ANA' = 90^\circ$. Deci $\angle AMN = \angle AA'N = \angle ACA'$, adică $\angle NMB + \angle NCB = 180^\circ$, ceea ce înseamnă că patrulaterul $MNCB$ este inscriptibil.

18. Conform ipotezei, triunghiul ABD este isoscel, deci

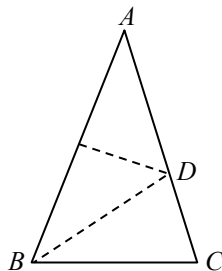
$m(\angle A) = m(\angle ABD) = \frac{1}{2} m(\angle B) = m(\angle DBC)$. Deci în

cercul ABD , $m(\angle DBC) = m(\angle A) = \frac{1}{2} m(\widehat{BD})$, deci

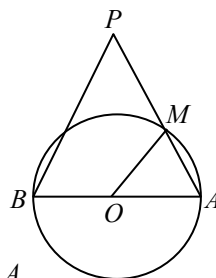
$\angle DBC$ este unghi cu vârful pe cerc, format de o coardă și tangentă, adică BC va fi tangentă cercului ADB .

Observație. Enunțul problemei poate fi extins astfel:

„Fie ABC un triunghi în care $m(\angle A) < m(\angle B)$. Ducem BD ($D \in AC$), astfel încât $m(\angle DBC) = m(\angle A)$. Atunci BC va fi tangentă cercului ADB ”.

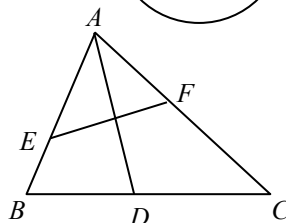


19. Fie B punctul diametral opus lui A . În triunghiul APB , OM este linie mijlocie, deci $BP = 2OM = 2R$, iar B fix, deci locul geometric al lui P este cercul de centru B și rază $2R$.



20. Utilizăm teorema bisectoarei în triunghiul ABC :

$\frac{AF}{AE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, de unde rezultă că triunghiurile AEF și ABC sunt asemenea, deci $m(\angle AFE) = m(\angle ABC)$ sau $m(\angle B) + m(\angle EFC) = 180^\circ$, adică patrulaterul $BEFC$ este inscripabil.

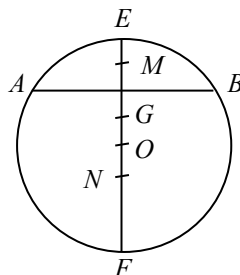


21. Fie AB o coardă mobilă de lungime constantă l și d distanța de la centrul O la AB ($OG = d = \text{ct.}$).

Atunci $EG = R - d = \text{const.} \Rightarrow OM = R - EM =$

$$= R - \frac{R-d}{2} = \frac{R+d}{2} = \text{ct. (unde } M \text{ este mijlocul lui } EG),$$

deci locul geometric al cercurilor tangente la AB și arcul AEB este un cerc concentric cu O , de rază $\frac{R+d}{2}$.



Pe de altă parte, dacă N este mijlocul lui GF , $ON = OF - NF =$

$$= R - \frac{GF}{2} = R - \frac{R+d}{2} = \frac{R-d}{2} = \text{ct.}$$

A doua componentă a locului geometric este alt cerc concentric cu O , de rază $\frac{R-d}{2}$.

22. Fie F proiecția lui O pe CD și $OE = \frac{CD}{2}$. Triun-

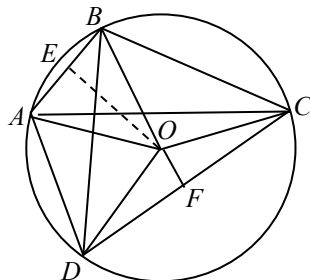
ghiurile AOE , ODF sunt congruente și dreptunghice. Așadar, $m(\angle AOB) + m(\angle COD) = 180^\circ$, deci $AC \perp BD$ și reciproc.

23. Fie E, F, G și H mijloacele laturilor AB, BC, CD și AD . Se observă că cele două coarde sunt perpendiculare pe EF , respectiv GH , care sunt liniile centrelor și cum fiecare este paralelă cu AC , ca linii mijlocii, vor fi paralele între ele, deci și cele două coarde vor fi paralele.

24. a) Dreapta DE este tangenta cercului (ACE) dacă și numai dacă $m(\angle DEA) = m(\angle ACE)$. Dar $m(\angle DEA) = m(\angle DCB) = m(\angle DBA) = m(\angle DCE)$.

b) Fie $AT \perp AO$; $m(\angle TAC) = m(\angle ABC) = m(\angle CDE)$. De unde rezultă că dreptele AT și DE sunt paralele, adică $AO \perp DE$.

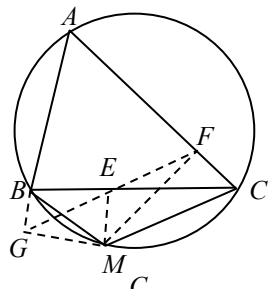
25. $\triangle APT \cong \triangle BQT \Rightarrow AP \cong BQ$ și $PT \cong TQ \Rightarrow \triangle PTQ$ este isoscel $\Rightarrow \angle P_1 + \angle P_2 = \angle Q_1 + \angle Q_2$ și $\angle A_1 + \angle A_2 = \angle B_1 + \angle B_2$, deci $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle P_1 + \angle P_2 = 180^\circ$, deci $AB \parallel PQ$ și deci $APQB$ este trapez isoscel.



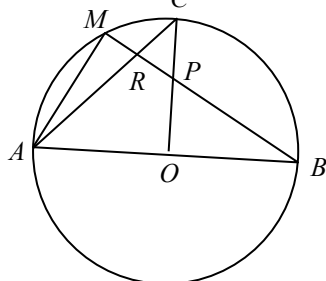
34. Notăm prin $\mathcal{C}$ cercul dat și fie $C = PB \cap \mathcal{C}$, $D = PA \cap \mathcal{C}$, iar prin $E = AC \cap BD$.
În triunghiul ABP , $AC \perp BP$ și $BD \perp AP$, deci E este ortocentru, rezultă că $PE \perp AB$.

35. În patrulaterul inscriptibil $EBGM$ avem:

$m(\sphericalangle BEG) = m(\sphericalangle BMG)$; analog $m(\sphericalangle CMF) = m(\sphericalangle CEF)$.
Pe de altă parte, triunghiurile BGM și FCM sunt asemenea (sunt dreptunghice și $m(\sphericalangle GBM) = m(\sphericalangle FCM)$, de unde $m(\sphericalangle BMG) = m(\sphericalangle FMC)$, deci $m(\sphericalangle BEG) = m(\sphericalangle FEC)$, adică punctele F, E, G sunt coliniare.



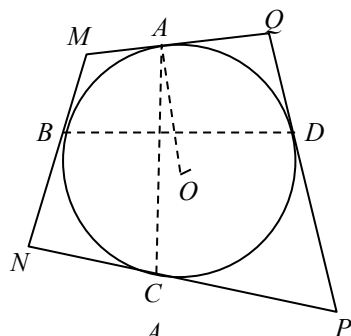
36. Se constată că $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$, $m(\sphericalangle R) > 45^\circ$, $m(\sphericalangle P) > 45^\circ$. Deci triunghiul CPR poate fi isoscel cu $m(\sphericalangle P) = m(\sphericalangle R)$. De aici rezultă $m(\sphericalangle MAR) = m(\sphericalangle PBO)$, adică M se află la jumătatea arcului AC . Deci: $(\sphericalangle B) = 22^\circ 30'$, iar $m(\sphericalangle M) = 90^\circ$; $m(\sphericalangle MAB) = 67^\circ 30'$.



37. Să observăm că $m(\sphericalangle AMB) = 180^\circ - m(\sphericalangle ACB)$ și $m(\sphericalangle CPD) = 180^\circ - 2 \cdot m(\sphericalangle CBD)$. Deci $2 \cdot (m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle CBD)) = 180^\circ$ sau $m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle CBD) = 90^\circ$ și atunci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. De aici rezultă că dacă diagonalele AC și BD sunt perpendiculare, atunci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

Reciproc, dacă $MNPQ$ este inscriptibil, atunci:

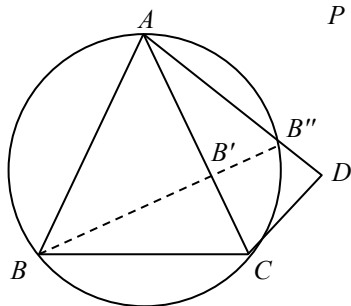
$$180^\circ = m(\sphericalangle M) + m(\sphericalangle P) = \frac{1}{2} [m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{DA}) - m(\widehat{AB}) + m(\widehat{DA}) + m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) - m(\widehat{CD})] = m(\widehat{BC}) + m(\widehat{DA}), \text{ adică } AC \perp BD.$$



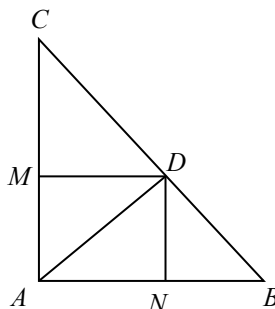
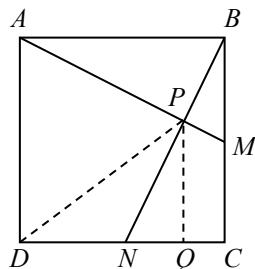
38. Fie $CD \perp AB''$ ($D \in AB''$).

Patrulaterul $B'B''DC$ este inscriptibil ($\sphericalangle B' = \sphericalangle D = 90^\circ$), deci $\sphericalangle AB''B \equiv \sphericalangle ACD$, dar $\sphericalangle AB''B \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABC$, deci

$$m(\sphericalangle ACD) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AB'C), \text{ adică } CD \text{ este tangentă la cerc.}$$



39. OP fiind coardă comună în cercurile (AOB) , (BOC) , O_1O_2 va fi mediatoarea lui OP , deci $O_1O_2 \perp OP$. În mod analog $O_3O_4 \perp OD$, de unde rezultă că O_1O_2 și O_3O_4 sunt paralele. Tot așa se arată că O_1O_4 și O_2O_3 sunt paralele.



8. a) $MD^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$, $ND^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ și $MN^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$.

Deoarece $a > b$, rezultă $ND > MN$, MD , deci triunghiul poate fi dreptunghic cu ipotenuza ND :

$$a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + b^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 4b^2 \Leftrightarrow a = b\sqrt{2}.$$

b) Dacă NMD ar fi isoscel, atunci $DM \equiv MN \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + b^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}, \text{ fapt imposibil.}$$

9. Fie $BD = 9m$; $DC = 16m$ ($m \in \mathbb{R}$). Conform teoremei lui Pitagora, $AD^2 = 81 - 81m^2 = 144 - 256m^2$; $175m^2 = 63 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow m = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = BD + DC = (9 + 6)m =$$

$$= 25 \cdot \frac{3}{5} = 15. \text{ Deoarece lungimile laturilor } BC, CA, AB$$

verifică teorema lui Pitagora: $15^2 = 12^2 + 9^2$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A .

10. Fie D mijlocul lui BC . Atunci $AB \equiv BD$ și $\sphericalangle B = 60^\circ$. Rezultă că triunghiul ABD este echilateral. De aici rezultă

$$\text{că triunghiul } ADC \text{ este isoscel, cu } m(\sphericalangle C) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle ADC) =$$

$$= 30^\circ. \text{ Deci } \sphericalangle A = 90^\circ.$$

11. $m(\sphericalangle DCB) = m(\sphericalangle BCA) = m(\sphericalangle ACE) = \alpha$. De aici, pentru ca punctele D, C și E să fie coliniare, trebuie ca $m(\sphericalangle DCE) = 180^\circ$ fapt echivalent cu $3\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$.

12. Utilizând teorema lui Ptolemeu în trapezul isoscel $ABCD$, care este în același timp patrulater inscriptibil, rezultă: $d = \sqrt{ab + b^2}$.

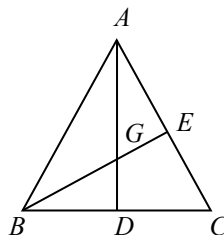
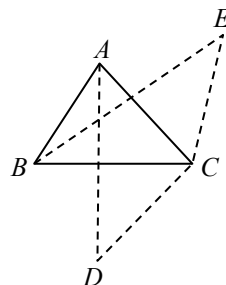
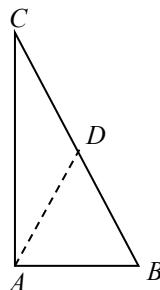
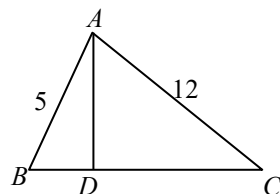
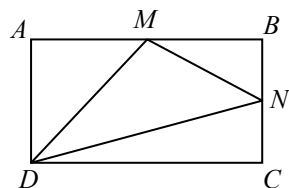
13. Fie $AB = b$, $BC = a$; $AD^2 = b^2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2$;

$$AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{3}. \text{ Deci:}$$

$$BG^2 = BD^2 + GD^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{1}{3} AD\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{9} \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right);$$

$$2AG^2 + BG^2 = 2 \cdot \frac{4b^2 - a^2}{9} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9} - \frac{a^2}{36} =$$

$$= \frac{8b^2 - 2a^2 + b^2}{9} + \frac{8a^2}{36} = b^2 - \frac{2a^2}{9} + \frac{2a^2}{9} = b^2 = AB^2.$$



14. Fie a, b, c laturile triunghiului dreptunghic. Relația teoremei lui Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$ admite o rezolvare în numere întregi, folosind identitatea: $(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$, cu $a = m^2 + n^2, b = m^2 - n^2, c = 2mn, m, n \in \mathbb{N}, m > n$.

15. Dacă a, b, c se exprimă prin numere întregi, atunci $a = m^2 + n^2, b = m^2 - n^2, c = 2mn, m, n \in \mathbb{N}, m > n$. Deci $a + b + c = 2m(m + n)$, iar $a^3 + b^3 + c^3 = 2m^2(m + n)(m^3 - m^2n + mn^2 + 3n^2)$, deci este divizibilă prin $a + b + c$.

16. Dacă $AB \parallel CD$, atunci $\text{aria}(ADC) = \text{aria}(BDC)$, deoarece $\text{aria}(ADC) = \frac{1}{2}DC \cdot AA'$, iar

$\text{aria}(BDC) = \frac{1}{2}DC \cdot BB'$ (AA' și $BB' \perp DC, A', B' \in DC$) și $AA' \equiv BB'$. Dar $\text{aria}(ADC) = \text{aria}(BDC) \Leftrightarrow \text{aria}(AOD) + \text{aria}(DOC) = \text{aria}(BOC) + \text{aria}(DOC) \Leftrightarrow \text{aria}(AOD) = \text{aria}(BOC)$.

Reciproc, dacă $\text{aria}(AOD) = \text{aria}(BOC) \Leftrightarrow \text{aria}(ADC) = \text{aria}(BDC) \Leftrightarrow \frac{1}{2}AA' \cdot DC = \frac{1}{2}BB' \cdot DC \Leftrightarrow AA' \equiv BB' \Leftrightarrow AB \parallel CD$.

17. Notăm cu a latura triunghiului echilateral și să observăm că: $\mathcal{A}_{BDC} + \mathcal{A}_{CDA} + \mathcal{A}_{ADB} = \mathcal{A}_{ABC}$ sau:

$$\frac{a \cdot DM}{2} + \frac{a \cdot DP}{2} + \frac{a \cdot DQ}{2} = \frac{a \cdot h}{2}, \text{ unde } h \text{ este înălțimea}$$

triunghiului ABC . De unde: $DM + DP + DQ = h$.

18. Deoarece Q este centrul de greutate al triunghiului

ABC , avem: $AQ = \frac{2}{3}AM; AS = \frac{1}{2}AM; QS = QA - AS =$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)AM = \frac{1}{6}AM. \text{ Analog } QR = \frac{1}{6}BN. \text{ De unde:}$$

$$\frac{QS}{QA} = \frac{\frac{1}{6}AM}{\frac{2}{3}AM} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = \frac{QR}{QB}, \text{ deci } \parallel AB \parallel MN,$$

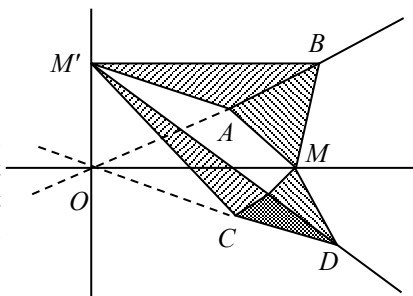
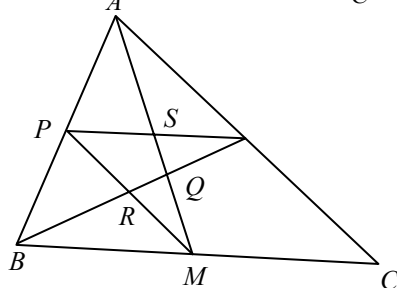
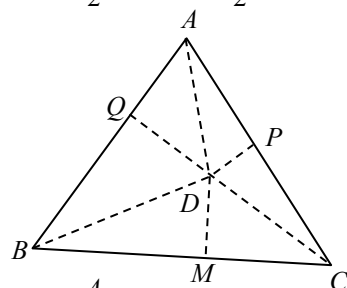
adică $MNRS$ este trapez, ori se cunoaște că într-un trapez triunghiurile determinate de diagonale cu laturile neparalele sunt echivalente, deci $S_{QRM} = S_{QSN}$.

19. Fie h_1 și h_2 distanțele de la M la dreptele AB și CD .

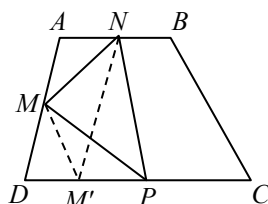
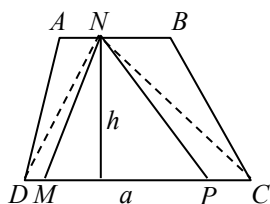
Trebuie să avem $AB \cdot h_1 = CD \cdot h_2$, de unde $h_1 = h_2$.

Dacă punctul M are distanțele egale la dreptele AB și CD , el se află pe una din bisectoarele unghiului format de cele două drepte, deci locul geometric este alcătuit din bisectoarele unghiurilor formate de dreptele AB și CD .

20. Vom analiza diferitele cazuri. Dacă triunghiul MNP are o latură MP pe baza mare a a trapezului și vârful N pe baza mică, atunci $S_{MNP} = \frac{MP \cdot h}{2} \leq \frac{a \cdot h}{2}$, egalitatea având loc când cele



două baze coincid. Celelalte cazuri se reduc la aceasta dacă ținem cont de faptul că aria unui triunghi nu se schimbă dacă vârful se mișcă pe o paralelă la bază.

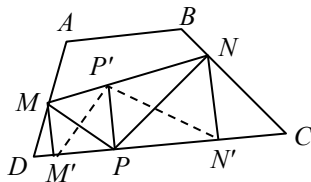


De exemplu, dacă $N \in AB$, $M \in AD$, $P \in DC$, ducem

$$MM' \parallel NP \text{ și } S_{MNP} < S_{NM'P} < \frac{ah}{2}.$$

Dacă $P \in DC$, $M \in AD$ și $N \in BC$, ducem $MM' \perp DC$, $NN' \perp DC$ și $PP' \perp DC$, $P' \in MN$.

$$\text{Atunci } S_{MNP} = S_{M'P'N'} < \frac{ah}{2}.$$



21. Fie a latura rombului. Atunci diagonalele rombului

vor avea dimensiunile a și $a\sqrt{3}$. Aria sa va fi $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Paralelogramul va avea deci laturile a și $a\sqrt{3}$, iar înălțimea $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Aria sa va fi $\frac{3a^2}{2}$. Așadar, rombul și

paralelogramul respectiv au raportul ariilor $\sqrt{3}$.

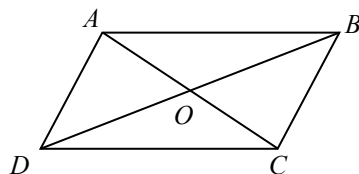
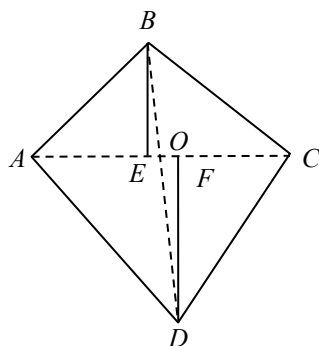
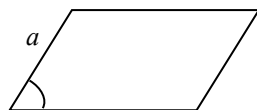
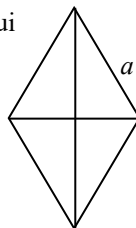
22. Fie $BE, DF \perp AC$ ($E, F \in AC$). Avem:

$$2S = (S_{ABC} + S_{ACD}) = 2\left(\frac{AC \cdot BE}{2} + \frac{AC \cdot DF}{2}\right) =$$

$= AC \cdot (BE + DF)$. Dar prin ipoteză: $2S = AC \cdot BD$, deci $AC \cdot (BE + DF) = AC \cdot BD \Leftrightarrow BE + DF = BD$. De aici rezultă $E \equiv F \equiv O$, adică $BD \perp AC$, adică triunghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt dreptunghice. Pe de altă parte, se știe că într-un triunghi dreptunghic, ortocentrul se află în vârful unghiului drept, deci problema a fost rezolvată.

23. Să remarcăm că $\text{aria}(AMN) = \text{aria}(AMDC) + \text{aria}(DCN)$, unde $D = MN \cap BC$. Pe de altă parte, dacă ținem cont că $\text{aria}(MDB) = \text{aria}(DNC)$, deoarece $BMNC$ este trapez, rezultă că $\text{aria}(AMN) = \text{aria}(AMDC) + \text{aria}(DCN) = \text{aria}(AMDC) + \text{aria}(BMD) = \text{aria}(ABC) = \text{ct.}$

24. Fie O intersecția diagonalelor AC și BD ale paralelogramului $ABCD$. Triunghiurile AOB și BOC au aceeași arie întrucât au bazele egale $AO \equiv OC$ și înălțime comună: $d(B, AC)$. Analog și pentru celelalte triunghiuri componente.



Reciproc, fie $ABCD$ un patrulater convex și O intersecția diagonalelor sale. Întrucât $\sigma(AOB) = \sigma(BOC)$ și cum cele două triunghiuri au înălțime comună, rezultă $AO \equiv OC$. La fel se arată că $BO \equiv OD$, iar patrulaterul ale cărui diagonale se taie în părți egale este paralelogram.

25. Să remarcăm că $\text{aria}(AMQ) = \frac{1}{4} \text{aria}(ABD)$ și

$\text{aria}(NPC) = \frac{1}{4} \text{aria}(BCD)$. Deci $\text{aria}(AMQ) + \text{aria}(NPC) =$

$= \frac{1}{4} \text{aria}(ABCD)$. Pe de altă parte, $MNPQ$ este paralelo-

gram, deci $\text{aria}(MRQ) = \text{aria}(RPN) = \frac{1}{4} \text{aria}(MNPQ)$.

Dar $\text{aria}(MNPQ) = \text{aria}(ABCD) - [\text{aria}(AMQ) + \text{aria}(PNC) + \text{aria}(BMN) + \text{aria}(DQP)] =$

$= \text{aria}(ABCD) - \frac{1}{2} \text{aria}(ABCD) = \frac{1}{2} \text{aria}(ABCD)$. Așadar, $\text{aria}(AMRQ) + \text{aria}(CNRP) =$

$= \text{aria}(AMQ) + \text{aria}(NPC) + \text{aria}(MQR) + \text{aria}(RNP) = \frac{1}{4} \text{aria}(ABCD) + \frac{1}{4} \text{aria}(ABCD) =$

$= \frac{1}{2} \text{aria}(ABCD)$.

26. Din $b^2 - c^2 = b$, $(a+b)^2 - 2c^2 = 25$ și $c^2 = ab$ rezultă: $b^2 - ab = b \Rightarrow b - a = b \Rightarrow b - a = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b = a + 1$ și $(2a+1)^2 - 2a(a+1) = 25 \Leftrightarrow a^2 + a - 12 = 0$, cu $a = 3$, deci $b = 4$, $c = 2\sqrt{3}$;
 $P = 12 + 12\sqrt{3}$. Pentru a afla aria, ducem $AD \perp BC$, $AD = h$, $CD = x$, $DB = 3 - x$, deci:

$4^2 - x^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{13}{6} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{407}}{6}$; $\text{aria}(ABC) = \frac{3 \cdot \sqrt{407}}{6 \cdot 2} = \frac{\sqrt{407}}{4}$.

27. Din cele două relații obținem: $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = b = c$, deci triunghiul ABC este echilateral. Astfel, prima relație devine: $3a^2 = 4\sqrt{3}$ sau

$a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Pe de altă parte, se știe că aria triunghiului echilateral de latură a este $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

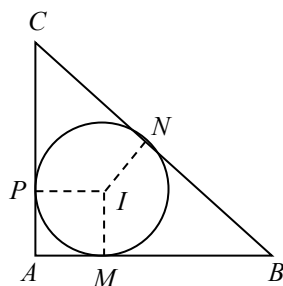
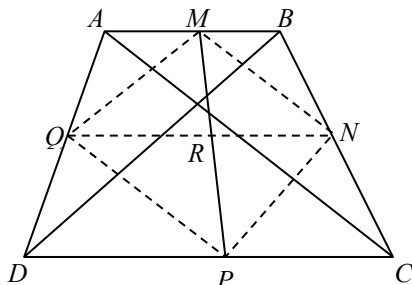
Deci $S = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$.

28. Fie I centrul cercului înscris și M, N, P proiecțiile acestuia pe laturile AB, BC, CA . Avem:

$S_{ABC} = S_{BIC} + S_{CIA} + S_{AIB} \Leftrightarrow S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = rp$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Pe de altă parte, $b + c = AC + AB = AP + PC + AM + MB = r + CN + r + BN = 2r + BC = 2r + a$. Din aceste două relații, deducem că $S = r(a+r)$.



29. Din asemănarea triunghiurilor CFD și $CC'B$ obținem:

$\frac{CF}{CC'} = \frac{CD}{CB}$, iar din asemănarea triunghiurilor

BED și $BB'C$: $\frac{BE}{BB'} = \frac{BD}{BC}$. Adunăm aceste două relații:

$$\frac{CF}{CC'} + \frac{BE}{BB'} = \frac{CD + BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1, \text{ care se mai scrie:}$$

$$\frac{AB \cdot CF}{AB \cdot CC'} + \frac{AC \cdot BE}{AC \cdot BB'} = 1 \Leftrightarrow \frac{AB \cdot CF}{2S} + \frac{AC \cdot BE}{2S} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot CF + AC \cdot BE = 2S.$$

30. Date fiind segmentele a și b , ipotenuza triunghiului dreptunghic care are catetele a și b va avea lungimea $\sqrt{a^2 + b^2}$. Dându-se un segment l , ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel de catete l va fi $l\sqrt{2}$. În cazul nostru, ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel de catete $\sqrt{a^2 + b^2}$ va avea lungimea $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

31. Dacă laturile sunt $2n - 2$, $2n + 2$, conform cu enunțul, atunci $S = 6n$; pe de altă parte, dacă p este semiperimetrul, atunci: $S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c) \Leftrightarrow 36n^2 = 3n(n + 2)n(n - 2) \Leftrightarrow 3(n^2 - 4) = 36 \Leftrightarrow n^2 = 16$, $n = 4 \Leftrightarrow a = 10$, $b = 8$, $c = 6$ care sunt numere pitagorice, deci triunghiul cu aceste laturi este dreptunghic.

32. Dintr-un vârf al unui poligon convex cu n laturi putem duce $n - 3$ diagonale. Deci din vârfuri vom avea $n(n - 3)$ și pentru că ele au fost astfel numărate de două ori, numărul de diagonale va fi: $\frac{n(n - 3)}{2}$. Pentru ca acest număr să fie prim, trebuie ca unul din factori să fie egal

cu 1 sau 2: $n - 3 = 1 \Rightarrow n = 4$, cazul pătratului, și $n - 3 = 2 \Rightarrow n = 5$, cazul pentagonului.

33. a) Dacă notăm cu l latura poligonului regulat cu n laturi, atunci aria sa poate fi calculată în două moduri:

$$\begin{aligned} A_{A_1 A_2 \dots A_n} &= A_{A_1 M A_2} + A_{A_2 M A_3} + \dots + A_{A_n M A_1} = \\ &= \frac{l \cdot d_1}{2} + \frac{l \cdot d_2}{2} + \dots + \frac{l \cdot d_n}{2} = \frac{l(d_1 + d_2 + \dots + d_n)}{2}. \end{aligned}$$

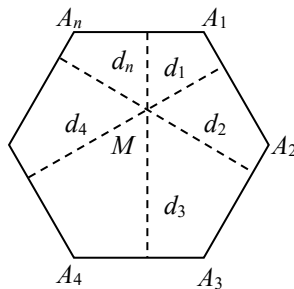
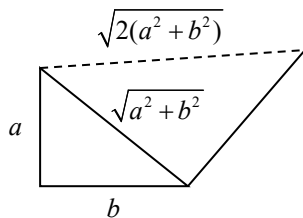
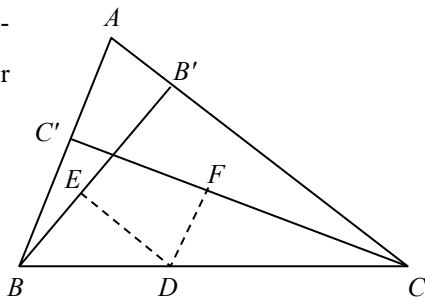
În același timp, $A_{A_1 A_2 \dots A_n} = n \cdot \frac{l \cdot d_n}{2}$. Egalând, obținem:

$$a_n = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}.$$

$$\text{b) } d_1 + d_2 + d_3 = 3a_3 = 3 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{2}; \quad d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 3 \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} = 3l\sqrt{3}.$$

34. Se știe că $r_a = \frac{S}{p - a}$, $r_b = \frac{S}{p - b}$, $r_c = \frac{S}{p - c}$, unde S este aria triunghiului, iar $p = \frac{a + b + c}{2}$.

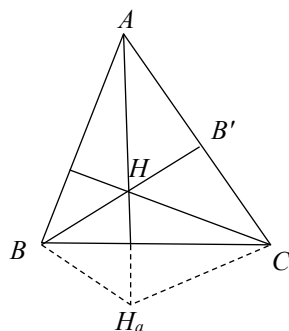
$$\begin{aligned} r_a + r_c = a &\Leftrightarrow \frac{S}{p - b} + \frac{S}{p - c} = a \Leftrightarrow aS = a(p - b)(p - c) \Leftrightarrow p(p - a)(p - b)(p - c) = \\ &= (p - b)^2(p - c)^2 \Leftrightarrow p(p - a) = (p - b)(p - c) \Leftrightarrow p(b + c - a) = bc \Leftrightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc \Leftrightarrow \end{aligned}$$



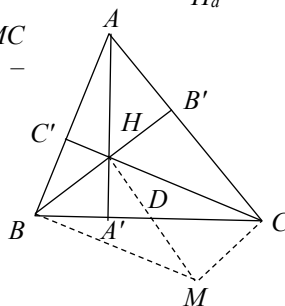
$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$, relație rare înseamnă că triunghiul ABC este dreptunghic în A .

4. Probleme recapitulative și pentru cercurile de elevi

1. Din faptul că $\Delta BH_aC \equiv \Delta BHC$ rezultă $\sphericalangle BH_aC \equiv \sphericalangle BHC$. Dar $m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - m(\sphericalangle CHB') = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$, deci $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle BH_aC) = 180^\circ$, adică patrulaterul ABH_aC este inscripabil.



2. Întrucât $[HD] \equiv [DM]$ și $[BD] \equiv [DC]$, patrulaterul $HBMC$ este paralelogram. De aici $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BHC) = 180^\circ - m(\sphericalangle A)$, adică patrulaterul $ABMC$ este inscripabil.



3. $\Delta MPC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC}$; $\Delta AMQ \sim \Delta ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}$. Adunând aceste relații avem:

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = \frac{MC + AM}{AC} = 1.$$

4. Fie p semiperimetrul triunghiului, iar R și Q pe Ox , Oy , astfel încât $OR = OQ = p$. Construim cercul tangent la laturile unghiului în R și Q . Tangenta dusă din P la acest cerc (cu punctul de tangență în interiorul triunghiului ORQ) taie pe Ox și Oy în A și B . Astfel triunghiul AOB este obținut.

5. Plecăm de la inegalitățile evidente: $a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$; $b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 = (b - c + a)(b + c - a)$ și $c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 = (c - a + b)(c + a - b)$ pe care le înmulțim membru cu membru și obținem: $a^2b^2c^2 \geq (a + b - c)^2(a + c - b)^2(b + c - a)^2$ și ținând cont că $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, putem extrage radicalul, obținând inegalitatea cerută.

6. Unim P cu A și cu B ; PA și PB intersectează cercul în C și D . Evident, $BC \perp AP$ și $AD \perp PB$. Deci $H = AD \cap CB$ va fi ortocentrul triunghiului APB , adică $PH \perp AB$.

7. Relația se scrie: $(a - 2k)^2 + (b - 3k)^2 + (c - 4k)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k$. Pentru o altă valoare k' , obținem: $a' = 2k'$; $b' = 3k'$; $c' = 4k'$, de unde $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{k}{k'}$, adică relația generea-

ză laturi de triunghiuri asemenea.

8. Relația se scrie: $(a + c - 2b)^2 + (b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow a + c - 2b = 0$ și $b - c = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

9. Fie E și F proiecțiile centrelor O_1 și O_2 pe MN . Patrulaterul O_1O_2FE este trapez dreptunghic în care $MN = 2EF$ și $EF < O_1O_2$ (EF este distanța dintre paralelele O_1E și O_2I , în timp ce O_1O_2 este oblică). De aici poziția de maxim se va obține ducând paralela prin A la O_1O_2 .

10. Dacă E, F, G, H sunt punctele de tangență ale laturilor AB, BC, CD și AD cu cercul, atunci se observă că $[AE] \equiv [AH]$, $[BE] \equiv [BF]$, $[CF] \equiv [CG]$ și $[DG] \equiv [DH]$ (ca tangente duse din

același punct). Adunând aceste relații se obține relația din enunț. Reciproca o demonstrăm prin metoda reducerii la absurd, presupunând că are loc relația din enunț. Dacă patrulaterul nu ar fi circumscriptibil, există un cerc tangent la trei laturi ale acestuia AD , AB , BC (obținut de exemplu, construind bisectoarele din A și B , care se intersectează în centrul O al acestui cerc). Fie $EF \parallel DC$, EF tangent la cercul (O) . Presupunem că $DC \cap (O) = \emptyset$. Patrulaterului $ABEF$ îi putem aplica proprietatea directă: $AB + EF = AF + BE$; pe de altă parte: $AB + DC = AD + BC$ sau $AB + DC = AF + FD + BE + EC \Leftrightarrow DC - EF = FD + EC \Leftrightarrow DC = DF + FE + EC$ (contradicție).

11. a) Patrulateralele $BPMA'$ și $A'MNC$, fiind inscriptibile, putem scrie: $m(\sphericalangle BMA') = m(\sphericalangle BPA') = m(\sphericalangle BAA') + m(\sphericalangle PA'A)$, $m(\sphericalangle CMA') = m(\sphericalangle CNA') = m(\sphericalangle CAA') + m(\sphericalangle NA'A)$ care adunate dau: $m(\sphericalangle BMC) = m(\sphericalangle BMA') + m(\sphericalangle CMA') = m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle PAN)$.

b) $m(\sphericalangle BMC) = 2m(\sphericalangle A) \Leftrightarrow \sphericalangle PA'N \equiv \sphericalangle A \Leftrightarrow m(\sphericalangle MBA) + m(\sphericalangle MCA) = m(\sphericalangle A) \Leftrightarrow m(\sphericalangle BMC) = 2m(\sphericalangle A)$. Astfel, punctul M se va găsi la intersecția arcului de cerc, capabil de unghiul $2\angle A$ cu înălțimea AA' .

$$12. A = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}.$$

$$13. (R_1 + R_2)^2 = O_1O_2^2 = T_1T_2^2 + (R_2 - R_1)^2 \Leftrightarrow T_1T_2^2 = 4R_1R_2 \Leftrightarrow T_1T_2 = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

$$14. d = \sqrt{\frac{9r^2 - R^2}{8}}, r \leq R \leq 3r.$$

15. a) $\triangle ABA_1 \equiv \triangle C_1BC$ ($[AB] \equiv [C_1B]$; $[BC] \equiv [BA_1]$ și $\sphericalangle C_1BC \equiv \sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle B + 60^\circ$).

Deci $[AA_1] \equiv [CC_1]$. Analog și pentru cealaltă egalitate.

b) Fie T al doilea punct de intersecție a cercurilor (AC_1B) și (AB_1C) . De aici: $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle ATC) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BTC) = 120^\circ$. Dar $\sphericalangle BTA_1 \equiv \sphericalangle BCA_1 = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ATA_1 = 180^\circ$, deci punctele A , T , A_1 sunt coliniare. Analog B , T , B_1 și C , T , C_1 .

Se vede că $m(\sphericalangle ATB) = m(\sphericalangle BTC) = m(\sphericalangle CTA) = 120^\circ$.

16. Utilizând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABD și BDC avem:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 - DC^2 = \\ &= BC^2 + (AD + DC)(AD - DC) = BC^2 + AC(AC - 2DC) = \\ &= BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot DC. \end{aligned}$$

Relația (1) se mai numește relația teoremei lui Pitagora generalizată.

În cazul când $m(\sphericalangle C) > 90^\circ$, termenul $2AC \cdot DC$ se ia cu semnul $+$, iar în cazul triunghiului dreptunghic, acest termen dispare, deoarece $D \equiv C$.

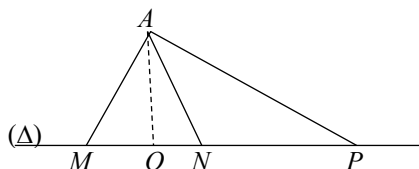
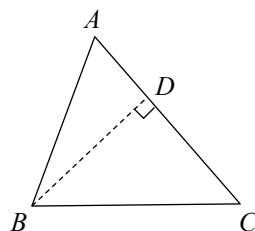
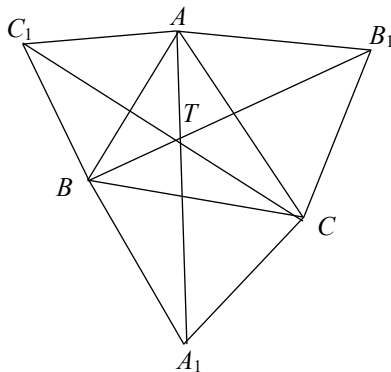
17. Fie $AO \perp (\Delta)$. Conform cu figura, avem:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2MN \cdot ON;$$

$$AP^2 = AN^2 + NP^2 + 2NP \cdot ON.$$

Înmulțim prima relație cu NP și a doua cu MN și adunăm:

$$AM^2 \cdot NP + AP^2 \cdot MN = AN^2(MN + NP) + MN \cdot NP(MN + NP) = AN^2 \cdot MP + MN \cdot NP \cdot MP.$$



Observație. Ca aplicație, putem calcula lungimea medianei AN într-un triunghi de laturi a, b, c obținând: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

18. Fie $ABCD$ dreptunghi și O punctul de intersecție a diagonalelor. Atunci MO este mediană în triunghiurile AMC și BMD . Relația medianei ne dă:

$$4MO^2 = 2(AM^2 + MC^2) - AC^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2$$

și cum $AC = BD$ rezultă relația (1).

Reciproc, dacă are loc relația (1) pentru orice M din plan, atunci luăm pe rând $M \in \{A, B, C, D\}$ și obținem:

$$M \equiv A \Rightarrow AC^2 = AB^2 + AD^2;$$

$$M \equiv B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = BD^2;$$

$$M \equiv C \Rightarrow AC^2 = BC^2 + CD^2;$$

$$M \equiv D \Rightarrow AD^2 + CD^2 = BD^2.$$

De aici deducem: $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$ și $AB^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2$, de unde, prin scădere: $AD^2 - BC^2 = BC^2 - AD^2 \Rightarrow AD = BC$ și apoi $AB = CD$, așa încât, ținând cont de relațiile de mai sus, obținem relații ale lui Pitagora, deci că $ABCD$ este dreptunghi.

19. Într-adevăr, trei drepte paralele între ele, duse prin A, B și C taie pe (Δ) în A_1, B_1 și C_1 . Din asemănări de triunghiuri deducem:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AA_1}{BB_1}; \frac{MB}{MC} = \frac{BB_1}{CC_1}; \frac{NC}{NA} = \frac{CC_1}{AA_1}$$

pe care le înmulțim și obținem (1).

Reciproc, dacă pe laturile AB, AC și prelungirea lui BC luăm punctele P, N și M , astfel încât să aibă loc relația (1), atunci punctele M, N, P sunt coliniare. Să presupunem, prin reducere la absurd, că M, N, P nu sunt coliniare. Atunci dreapta PN intersectează prelungirea lui BC în M' . Conform teoremei directe, avem:

$$\frac{PA}{PB} \cdot \frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \quad (2)$$

și comparând cu (1), rezultă $\frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC}$ și cum M și M' sunt ambele exterioare segmentului

BC , rezultă $M' = M$.

Observație. Reciproca teoremei lui Menelaus se folosește adesea la demonstrarea coliniarității lor de puncte.

20. Fie O punctul de concurență al celor trei drepte. În triunghiul ABA' tăiat de transversala $C'OC$, aplicăm teorema lui Menelaos, care ne dă:

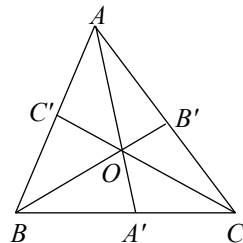
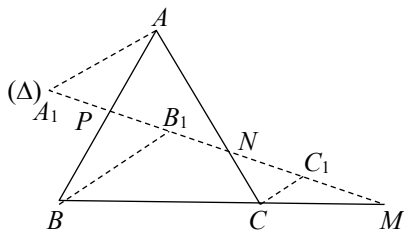
$$(2) \quad \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{CB}{CA'} \cdot \frac{OA'}{OA} = 1.$$

În mod analog, în triunghiul ACA' tăiat de transversala BOB' :

$$(3) \quad \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{OA'}{OA} = 1.$$

Împărțind (2) la (3), obținem (1).

Reciproca se demonstrează prin reducere la absurd, similar reciprocei teoremei lui Menelaus.



Observație. Reciproca teoremei lui Ceva se poate folosi pentru a demonstra că trei drepte sunt concurente în triunghi. În acest fel se poate demonstra concurența medianelor, bisectoarelor și înălțimilor într-un triunghi.

21. Teorema lui Menelaus, aplicată triunghiului ABA' , ne dă:

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB}{CA'} \cdot \frac{IA'}{IA} = 1, \text{ de unde: } \frac{AC'}{C'B} = \frac{IA}{IA'} \cdot \frac{CA'}{CB} \quad (2).$$

În mod analog, în triunghiul ACA' :

$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{IA'}{IA} = 1, \text{ de unde: } \frac{B'A}{B'C} = \frac{IA}{IA'} \cdot \frac{BA'}{BC} \quad (3).$$

Adunăm (2) și (3):

$$\frac{AC'}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} = \frac{IA}{IA'} \left(\frac{CA' + BA'}{BC} \right) = \frac{IA}{IA'}.$$

22. Folosim relația lui Van Aubel în triunghiul ABC și inegalitatea mediilor:

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ($x, y \geq 0$, cu egalitate pentru $x = y$). Obținem:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{ME} \cdot \frac{MC}{MF} &= \left(\frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} \right) \left(\frac{FB}{FA} + \frac{DB}{DC} \right) \left(\frac{EC}{EA} + \frac{DC}{DB} \right) \geq \\ &\geq 8 \sqrt{\frac{FA}{FB} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DC}{DB}} = 8. \end{aligned}$$

23. a) Patrulaterul $A'B'C'A_1$, fiind trapez isoscel ($B'C' -$ linie mijlocie, deci $B'C' \parallel BC$ și $C'A_1 = \frac{AB}{2} = A'B'$) este

inscriptibil, deci $A_1 \in (A'B'C')$; analog $B_1, C_1 \in (A'B'C')$. Pe de altă parte, din faptul că $A_0C' \parallel BH$ rezultă $\angle AC'A_0 \equiv \angle ABH \equiv \angle C_2A_1H$ (patrulaterul C_1HA_1B este inscriptibil), deci $A_0C'C_1A_1$ este inscriptibil, adică $A_0 \in C'C_1A_1$. Analog se arată că B_0 și C_0 aparțin aceluiași cerc.

b) A_1A' și B_1B' sunt coarde în cercul lui Euler, deci mediatoarele lor se intersectează în centrul cercului, care este punctul ω , mijlocul lui OH . În triunghiul HBO , B_0O este

linie mijlocie și rază în cercul lui Euler, deci $r_\omega = \frac{R}{2}$, unde $OB = R$ este rază în cercul (ABC) .

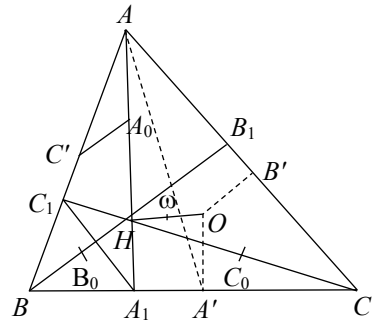
c) A_0A' este diametru în cercul lui Euler ($\angle A_0A_1A'$ este drept), deci trece prin ω . De aici rezultă:

$$\Delta A_0H\omega \equiv \Delta \omega OA' \Rightarrow OA' \equiv A_0H = \frac{AH}{2}.$$

d) Fie $g = AA' \cap OH$; $\Delta AHg \sim \Delta gOA'$; $\frac{Ag}{gA'} = \frac{Hg}{gO} = \frac{AH}{DA'} = \frac{2}{1}$. Dar AA' este mediană și punctul

g împarte mediana AA' în raportul $\frac{Ag}{gA} = \frac{2}{1}$, deci g este centrul de greutate, $g \equiv G$; de aici rezultă

că punctele H, ω, G, O sunt coliniare.



GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. $CB \perp AB \Rightarrow CB \perp (q) \Rightarrow CB \perp BD$. Pe de altă parte, $CB \perp (q)$, $BD \perp AD$, conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă $CD \perp AD$.

2. a) Fie $A_1 = OA' \cap BC$, $B_1 = OB' \cap AC$ și $C_1 = OC' \cap AB$. În triunghiul OA_1C_1 observăm că: $\frac{OC'}{OC_1} = \frac{OA'}{OA_1} = \frac{2}{3}$, deci $A'C' \parallel A_1C_1$. În mod analog se arată că $A'B' \parallel AB$, de unde rezultă că cele două plane sunt paralele.

$$b) \frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } A'B'C'} = \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2 = \left(\frac{2A_1B_1}{A'B'} \right)^2 = 9.$$

3. Fie d dreapta dusă prin S paralelă cu AB . Evident $d \in (SAB)$. În același timp $d \parallel CD$, deci $d \in (SCD)$. Așadar, dreapta d dusă prin S paralelă la laturile AB și CD este dreapta căutată. Totodată, paralela prin S la AD și BC va fi dreapta comună planelor (SAD) și (SBC) . Fie aceasta d' . Dreptele d și d' determină un plan π_1 paralel cu π , deoarece conține două drepte concurente paralele la π .

4. Deoarece $CB \perp (q)$, $BD \perp AD \Rightarrow CD \perp AD$. Așadar punctele B și D se află pe sfera de diametru AC . Dar $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$, deci $V = \frac{\pi}{6} (a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$.

5. Triunghiul ACD , fiind dreptunghic în A , obținem: $CD = a\sqrt{6}$. Fie $BE \perp CD$.

Notăm $CE = x$; $ED = a\sqrt{6} - x$. Ținând cont că:

$$BE^2 = a^2 - x^2 = 3a^2 - (a\sqrt{6} - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BE = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ și } AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. \text{ Deci } \mathcal{A}_{\text{tot}} = \text{aria}(ABC) + \text{aria}(ABD) + \text{aria}(ACD) + \text{aria}(BCD) =$$

$$= \frac{a^2}{2} (1 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

$$6. \mathcal{A}_{\text{pr}(AMB)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}; \alpha = 60^\circ$$

7. Din $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp EC$.

Apoi $EC \perp AB$ și $EC \perp AD \Rightarrow EC \perp (ABD) \Rightarrow EC \perp BD$.

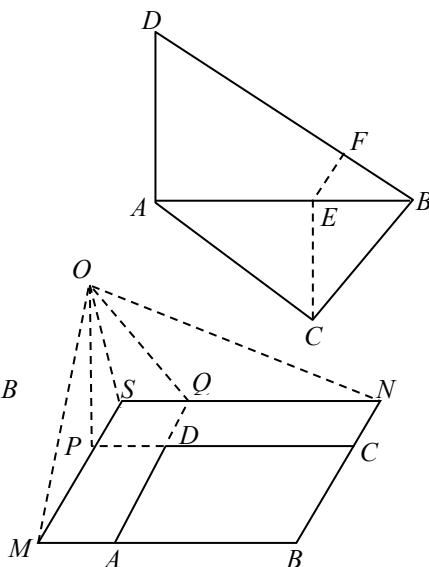
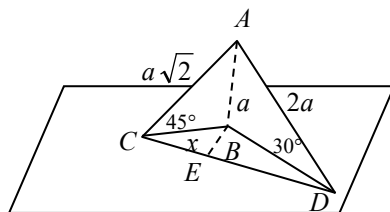
Deci $BD \perp EC$ și $BD \perp EF \Rightarrow BD \perp (EFC)$.

8. $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$ și cum $OM \perp AB$ rezultă $OM \perp CD$. Dar $OP \perp CD$, deci $CD \perp (OMP)$.

Pe de altă parte, $CD \subset (ABCD) \Rightarrow (OMP) \perp (ABCD)$.

Analog se arată că $(ONQ) \perp (ABCD)$.

Dar $OS = (OMP) \cap (ONQ) \Rightarrow OS \perp (ABCD)$.



9. $AB^2 = AA'^2 + A'B^2 = AA'^2 + A'B'^2 + B'B^2$. Ținem cont că: $\sin(\pi_1, AB) = \frac{AA'}{AB}$; $\sin(\pi_2, AB) = \frac{BB'}{AB}$ și $\sin(A'B', AB) = \frac{AC}{AB}$, unde C este punctul de intersecție dintre paralelele prin A' la BB' și prin B la $A'B'$. Relația rezultă astfel imediat.

10. Să considerăm înălțimile VE în triunghiul VAB și CF în ABC ($F, F \in AB$). Fie $M \in VC$ arbitrar, iar N și F proiecțiile lui M pe planele VAB și ABC . Se observă imediat că $N \in VE$ și $P \in FC$. Tetraedrul $VABC$ se descompune astfel: $\gamma_{VABC} = \gamma_{MVAB} + \gamma_{MABC} =$
 $= \frac{AB \cdot VE \cdot MN}{6} + \frac{AB \cdot FC \cdot MP}{6}$ și cum $VE \equiv FC \Rightarrow \frac{AB \cdot VE \cdot (MN + MP)}{6} = V = \text{ct.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow MN + MP = \text{ct.}$

11. Se observă că triunghiurile BMN , CNP , DPQ și AMQ sunt congruente (conform criteriului LUL), deci $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv MQ$. De aici rezultă că triunghiurile MNQ și PNQ sunt echilaterale. O fiind mijlocul lui NQ , rezultă $MO \perp NQ$ și $PO \perp NQ$, adică planul MOP va fi perpendicular pe NQ .

12. Fie $B'E \perp MB$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $C'E \perp MB$.

$$C'E^2 = C'C^2 + B'E^2, \text{ dar } B'E = \frac{B'M \cdot B'B}{MB} = \frac{a\sqrt{5}}{5}, \text{ deci } C'E^2 = \frac{30a^2}{25}; C'E = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

14. Fie un triedru tridreptunghic ($OA \perp OB \perp OC \perp OA$), cu $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Planul (ABC) determină triunghiul ABC de laturi x, y, z ale căror lungimi sunt cele din problemă. Se vede că $OC \perp (AOB)$. Ducem $OD \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$ (D între A și B , deci unghiul C este ascuțit). Procedând asemănător, rezultă că și unghiurile A și B sunt ascuțite. Din calcul rezultă:

$$OD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}; CD^2 = c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}.$$

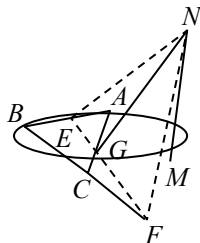
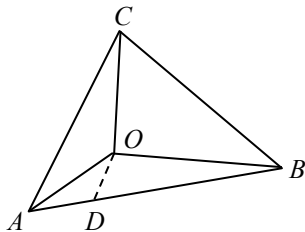
$$\text{Deci } \text{aria}(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

16. Fie a, b, c dimensiunile și d diagonală. Avem: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\text{tot}}$.

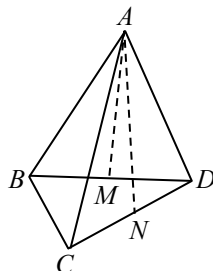
Deci $\mathcal{A}_{\text{tot}} \leq 2d^2 = \text{const.}$ De aici $\max \mathcal{A}_{\text{tot}} = 2d^2$, care se realizează pentru $a = b = c = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

17. Fie E, F, C proiecțiile lui N pe AB, BC și CA . Conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare, din $NM \perp (ABC)$, $NE \perp AB \Rightarrow ME \perp AB$.

Analog $MF \perp CB$ și $MG \perp AC$. În acest caz am ajuns la problema dreptei lui Simson.



18. Utilizăm teorema bisectoarei în triunghiurile ABC și ACD și vom putea scrie: $\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD} = \frac{NC}{ND}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, MN și BC sunt paralele, deci MN este paralelă și cu planul ABC .

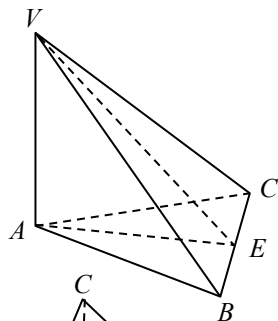


19. Fie $AO \perp (BCD) \Rightarrow BC \perp AQ, BC \perp AD \Rightarrow BC \perp OD$.

Fie $E = OD \cap BC, OF \perp OD, OG \perp BD$. Astfel, $\triangle ADF \equiv \triangle ADG$, deci $AF \equiv AG$ și apoi $\triangle AOF \equiv \triangle AOG$, deci $OF \equiv OG$. În fine, din asemănarea de triunghiuri:

$\frac{OG}{BE} = \frac{OD}{BD} = \frac{DG}{DE}$ și $\frac{OF}{EC} = \frac{OD}{DC} = \frac{DF}{DE}$ și cum $DF \equiv DG \Rightarrow BE \equiv CE$, adică în triunghiul ABC AB este mediatoare, deci $AB = AC$.

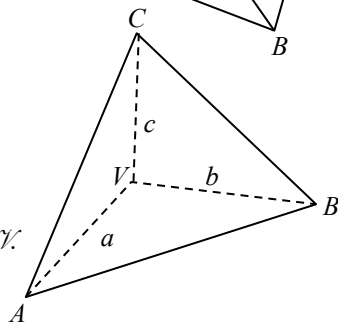
20. Fie $AE \perp BC, AV = h, AB = c, AC = b, BC = a, m(\sphericalangle VAB) = m(\sphericalangle VAC) = 90^\circ$. Relația dată se mai scrie: $(hc)^2 + (hb)^2 + (a \cdot VE)^2 = (a \cdot AE)^2 \Leftrightarrow h^2(b^2 + c^2) = a^2(AE^2 - VE^2) \Leftrightarrow h^2(b^2 + c^2) = a^2 \cdot h^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$, adică triunghiul ABC este dreptunghic. Reciproc, dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A , relația dată se dovedește adevărată.



21. Notăm cu $a = VA, b = VB, c = VC$ și să constatăm că

$$\gamma = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{abc}{6}. \text{ Pe de altă parte, } \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3} =$$

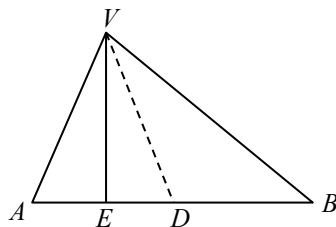
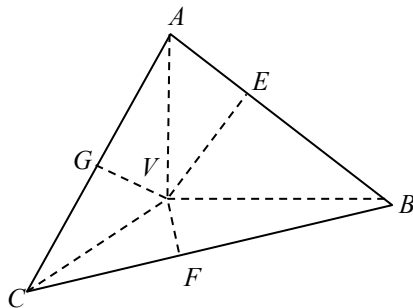
$$= \frac{1}{3} \sqrt{2 \cdot \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3} = \frac{1}{3} \sqrt{2 \cdot \frac{ac}{2} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{bc}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{abc}{2}\right)^2} = \frac{abc}{6} = \gamma.$$



22. Fie triunghiul dreptunghic $VAB, VE \perp AB$ și D mijlocul lui AB . Atunci $VE \leq VD = \frac{AB}{2}$.

Dacă E, F, G sunt proiecțiile lui V pe laturile AB, BC, CA , atunci vom avea:

$$VE + VF + VG \leq \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CA}{2}.$$



Egalitatea are loc când triunghiurile dreptunghice AVB , BVC , CVA sunt și isoscele, deci $VA = VB = VC$.

23. Fie $ABCD$ tetraedrul dat, E, F, G, H, I, J mijloacele muchiilor AB, BC, CD, DA, AC, BD respectiv. Planul determinat de muchia AB și punctul G , mijlocul lui CD , conține segmentul EG , care este diagonală în paralelogramul $EFGH$. Tot EG este conținut și de planul (CD, E) . Ori se știe că cele trei diagonale EG, FH și IJ au un punct comun.

24. Fie AO perpendiculara coborâtă din A pe planul BCD , iar $E = OD \cap BC$. Din $BC \perp AD$ și $BC \perp AO$ rezultă $BC \perp (AOD)$, deci $BC \perp ED$. În triunghiul BCD , ED este înălțime și mediană, deci BCD este isoscel de bază BC , adică $BD \equiv CD$ și tetraedrul rezultă astfel regulat.

25. Dacă M, N, P sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD și ABD aflate pe medianele AA_1, AA_2, AA_3 din cele trei triunghiuri, atunci: $\frac{AM}{AA_1} = \frac{AN}{AA_2} = \frac{AP}{AA_3} = \frac{2}{3}$, deci planele

(MNP) și (BCD) sunt paralele și în plus raportul de asemănare al triunghiurilor MNP și $A_1A_2A_3$ este $\frac{2}{3}$. Rezultă: $\frac{\sigma[MNP]}{\sigma[A_1A_2A_3]} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Dar $\sigma[A_1A_2A_3] = \frac{1}{4}\sigma[BCD]$. Deci $\sigma[MNP] = \frac{1}{9}\sigma[BCD]$.

Fie $QQ_1 \perp (MNP)$, $Q \in (BCD)$, $Q_1 \in (MNP)$ și $AA' \perp (BCD)$; deoarece planul (MNP) se află la $\frac{2}{3}$ de vârful A , rezultă că $QQ_1 = \frac{1}{3}AA'$. Așadar:

$$\frac{V[QMNP]}{V[ABCD]} = \frac{QQ_1 \cdot \sigma[MNP]}{AA' \cdot \sigma[BCD]} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}.$$

26. Demonstrăm prin reducere la absurd.

Fie $D = AC \cap (MNQ)$ și $P' = AV \cap (MNQ)$.

În triunghiul ABC aplicăm teorema lui Menelaus:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{DC}{DA} = 1, \text{ de unde } DC = 4DA.$$

Analog, în triunghiul VAC , avem: $\frac{VP'}{AP'} \cdot \frac{DA}{DC} \cdot \frac{QC}{QV} = 1$,

$$\text{deci } VP' = 8P'A \Leftrightarrow \frac{VP'}{P'A} = \frac{8}{1} \Leftrightarrow \frac{VA}{P'A} = \frac{9}{1}, \text{ adică } AP' = \frac{AV}{9} = \frac{a}{9}, \text{ ceea ce înseamnă că } P' \equiv P,$$

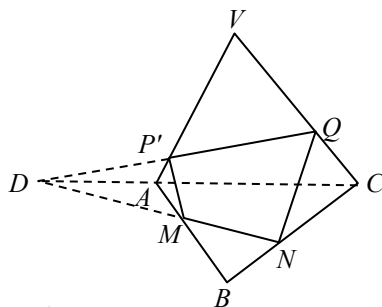
de unde rezultă că M, N, P, Q sunt coplanare.

27. a) $MNPQ$ este un paralelogram cu laturile paralele cu muchiile AC și BD . Perimetrul său este: $2(12 + a)$.

b) În cazul unui tetraedru regulat, muchiile opuse sunt perpendiculare, deci $MNPQ$ are unghiuri drepte. În același timp, dacă M este mijlocul lui AB , laturile sale devin linii mijlocii, deci egale între ele.

28. Notăm cu a, b, c, d, e, f lungimile muchiilor tetraedrului și vom obține următoarele relații: $d + e = b + c$; $a + d = b + f$; $c + f = a + c$; $d + f = a + b$; $e + b = d + c$; $e + f = a + c$. Scăzând din $d + e = b + c$ pe $e + b = d + c$ obținem: $d - b = b - d$ sau $2d = 2b$, $d = b$. De unde rezultă apoi: $e = c$ și $f = a$. Deci fețele tetraedrului rezultă astfel triunghiuri congruente.

$$\mathbf{29. a)} \quad \gamma_{AB'CD} = \frac{S_{ACD} \cdot B'D}{3} = \frac{CD \cdot AD \cdot B'D}{6} = \frac{\frac{b^2}{a} \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{c^2}{a}}{6} = \frac{b^3 c^3}{6a^3} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{bc}{a}\right)^3 = \frac{h^3}{6}.$$



$$b) B'C^2 = CD^2 + B'D^2 = \frac{b^4}{a^2} + \frac{c^4}{a^2} \Rightarrow B'C = \frac{1}{a} \sqrt{b^4 + c^4};$$

$$c) \gamma_{ABB'C} = \frac{1}{6} bc \cdot B'D = \frac{bc}{6} \cdot \frac{c^2}{a} = \frac{c^3}{6} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c^3}{6} \sin B;$$

$$d) \frac{\gamma_{AB'CD}}{\gamma_{ABB'C}} = \frac{b^3 c^3}{6a^3} \cdot \frac{6a}{bc^3} = \frac{b^2}{a^2} = \sin^2 B.$$

30. a) Fie $H' = AA' \cap BB'$, AA' și BB' înălțimi în triunghiul ABC . Avem: $AO \perp (OBC)$, $AA' \perp BC \Rightarrow BC \perp OA'$ și $BC \perp OA \Rightarrow BC \perp (AOA') \Rightarrow BC \perp OH'$.

Deci $OH' \perp BC$. Analog se arată că $OH' \perp AC$, de unde rezultă că $OH' \perp ABC$, deci $H' \equiv H$, adică H , proiecția lui O pe planul ABC , este ortocentrul triunghiului ABC .

b) Notăm $OA = a$, $OB = b$. $OC = c$. În triunghiul dreptunghic OBC , $OA' = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$;

$$\begin{aligned} AA'^2 &= OA^2 + OA'^2 = a^2 + \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} = \\ &= \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Pentru a calcula pe OH vom calcula volumul tetraedrului $OABC$ în două moduri.

$$\gamma_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{OBC} \cdot OA = \frac{abc}{6}; \quad \gamma_{OABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot OH, \text{ de unde: } OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}.$$

$$\text{Deci: } \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

$$c) HA'^2 = OA'^2 - OH^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} - \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 + c^2)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} = \frac{b^4 c^4}{(b^2 + c^2)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)}, \text{ de unde:}$$

$$\sin \alpha = \frac{HA'}{OA'} = \frac{bc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \text{ și prin analogie } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma =$$

$$= \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} + \frac{a^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} = 1.$$

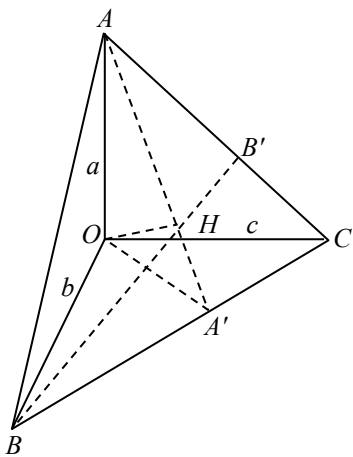
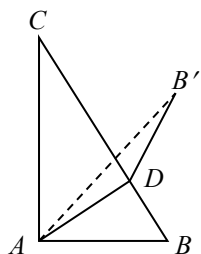
32. a) Se observă că triunghiul ABD este echilateral, iar $m(\angle EAB) = 30^\circ$, unde $AE \perp BC$. Se

$$\text{deduce din calcul: } MB = MD = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{3}}; \quad MC = \sqrt{4b^2 - 3a^2}.$$

$$b) d(S, BD) = MO = b.$$

$$\mathbf{33. a)} d(S, BC) = \frac{a\sqrt{7}}{2};$$

$$b) d(A, (SBD)) = AQ = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$



c) Fie (Δ) o paralelă prin B la AC . Cum $PQ \parallel AC$, rezultă $PQ \parallel (\Delta)$. Dacă O este mijlocul lui AC , $BO \perp AC$, deci $BO \perp (\Delta)$, dreapta (Δ) fiind comună planelor (BPQ) și (ABC) . Pe de altă parte, se observă imediat că $BQ \perp PQ$, deci $BQ \perp (\Delta)$. Așadar $m(\angle(BPQ), (ABC)) = m(\angle OBQ) = \alpha$;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OQ}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

34. a) $AG \parallel PQ, PQ \subset (CFP) \Rightarrow AG \parallel (CFP)$.

b) Din triunghiul isoscel HCF avem că $HQ \perp CF$. Pe de altă parte, $PQ \parallel AG, AG \perp HQ$, deci $HQ \perp PQ$, deci $HQ \perp (CFP)$.

35. Fie F mijlocul lui BC , $G = AF \cap DC$, F centrul feței $DCC'D'$, $H = FG \cap CC'$, $I = DD' \cap FG$.

Din asemănări rezultă: $CG = a$, $CH + DI = a$, $CH = \frac{a}{3}$, $DI = \frac{2a}{3}$;

$$\gamma_{GECH} = \frac{CH \cdot CE \cdot CG}{6} = \frac{a^3}{36}; \gamma_{GADI} = \frac{AD \cdot DI \cdot DG}{6} = \frac{4a^3}{18}; \gamma_{ADIECH} = \frac{7a^3}{36}.$$

Așadar, raportul volumelor este: $r = \frac{\frac{7a^3}{36}}{a^3 - \frac{7a^3}{36}} = \frac{7a^3}{36} \cdot \frac{36}{29a^3} = \frac{7}{29}$.

36. a) Fie H și L mijloacele segmentelor MN și EF .

Punctele A', H, C, I sunt coplanare aflându-se în planul $ACC'A'$ și determină un paralelogram, deoarece segmentele HC și $A'L$ sunt paralele și congruente de lungi-

me $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Pe de altă parte, MN și EF sunt paralele, de

unde rezultă că și planele $A'MN$ și CEF sunt paralele.

b) Fie $A'K \perp CL$. Triunghiurile $A'KL$ și CLC' sunt ase-

menea. De aici obținem: $\frac{A'L}{CL} = \frac{A'K}{CC'}$, de unde:

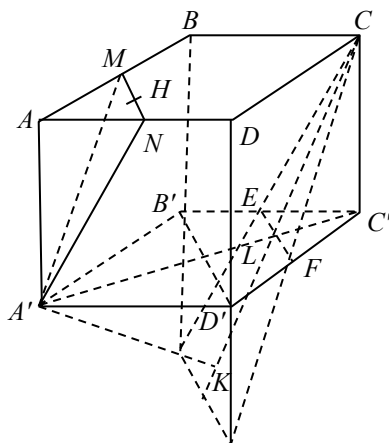
$$A'K = \frac{A'L \cdot CC'}{CL} \text{ și dacă ținem cont că } CL = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ și}$$

$$A'L = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ rezultă } A'K = a \text{ (unde } a \text{ este muchia cubului).}$$

37. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor AB, AD, VD și VB . Se vede că PQ și MN sunt paralele și congruente, ca fiind linii mijlocii în triunghiurile VBD și ABD , cu baza comună BD . Deci $MNPQ$ este paralelogram. Dar $MQ \parallel AV$ și $MN \parallel BD$, iar $AV \perp BD$, deoarece AV este conținută în planul VAC , perpendicular pe BD . De aici rezultă $MQ \perp MN$ și deci $MNPQ$ este dreptunghi. Acest dreptunghi devine pătrat dacă triunghiul VAC este echilateral.

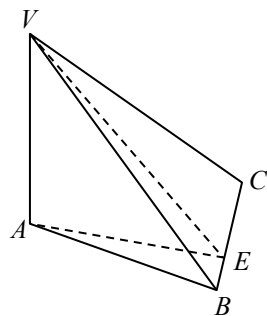
38. Fie $AE \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă $VE \perp BC$. Calculând,

obținem: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. În triunghiul VAE , $\angle VEA = 60^\circ \Rightarrow VE = 2AE = a\sqrt{3}$. Deci $AV = \frac{3a}{2}$;



$$\mathcal{V}_{VABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AV = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{tot.}} &= \mathcal{A}_{VAB} + \mathcal{A}_{VAC} + \mathcal{A}_{VBC} + \mathcal{A}_{ABC} = \\ &= \frac{1}{2} \left(a \cdot \frac{3a}{2} + a \cdot \frac{3a}{2} + a \cdot a\sqrt{3} + a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(3a^2 + \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3a^2}{4} (2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$



39. Notăm cu a latura bazei și cu m lungimea unei muchii.

Calculăm din aproape în aproape și obținem:

$$AP = \frac{7m}{9}; PV = \frac{2m}{9}; AR = \frac{7}{9} \cdot AO = \frac{7a\sqrt{3}}{54}; OR = \frac{2}{9} \cdot AO = \frac{a\sqrt{3}}{27};$$

$$OE = AE - AO = \frac{7a\sqrt{3}}{18} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2a\sqrt{3}}{9} \cdot AE = \frac{7}{9} AD = \frac{7a\sqrt{3}}{18}; ER = AE - AR = \frac{7a\sqrt{3}}{27};$$

$$\frac{OQ}{PR} = \frac{OE}{ER} = \frac{2a\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{27}{7a\sqrt{3}} = \frac{6}{7} \cdot \frac{PR}{OV} = \frac{AP}{AV} = \frac{7}{9}; \frac{PR}{OV} \cdot \frac{OQ}{PR} = \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OQ}{OV} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbf{40. a)} A'C \perp A'B'C'D' \Rightarrow A'C \perp A'C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'C^2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 \Rightarrow A'C = a\sqrt{2}; A'C \perp A'D';$$

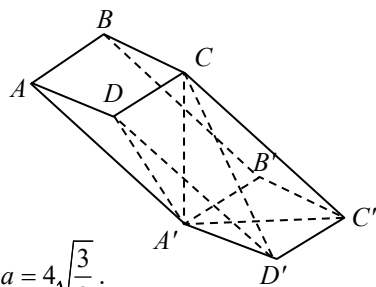
$$A'D' \perp D'C' \Rightarrow CD' \perp D'C' \Rightarrow CD' = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Deci } \mathcal{A}_{CD'C'D} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}; A'C \perp (ABCD);$$

$$CD \perp AD \Rightarrow A'D \perp AD, \text{ deci } A'D = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Deci } \mathcal{A}_{ADA'D'} = a \cdot a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3};$$

$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = 2(a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}) = 4a^2\sqrt{3}; \mathcal{V} = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{\frac{3}{2}}.$$



$$\mathbf{b)} \mathcal{A}_{\text{tot}} = 4\sqrt{3} \cdot 16 \cdot \frac{3}{2} = 32 \cdot 3\sqrt{3} = 96\sqrt{3}; \mathcal{A}_{\text{tot}} = 96\sqrt{3} + 2 \cdot 16 \cdot \frac{3}{2} = 96\sqrt{3} + 48 = 48(2\sqrt{3} + 1).$$

41. Dacă a, b, c sunt dimensiunile paralelipipedului și utilizând proprietățile șirului de rapoarte

$$\text{egale avem: } \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = r \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{16} = \frac{c^2}{25} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{50} = \frac{10^2}{50} = 2;$$

$$r = \sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, b = 4\sqrt{2}, c = 5\sqrt{2}.$$

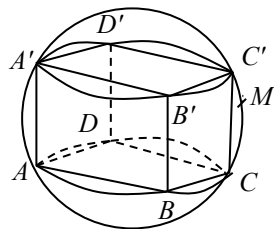
42. În triunghiul dreptunghic AMC' (AC' diametru în sferă) utilizăm teorema lui Pitagora: $MA^2 + MC'^2 = AC'^2 = (2R)^2 = 4R^2 \Rightarrow \sum MA^2 = 16R^2$, dar AC' este diagonală a cubului, deci:

$$4R^2 = 3a^2 \Rightarrow \sum MA^2 = 12a^2.$$

43. Într-adevăr, dacă a, b, c sunt dimensiunile paralelipipedului, atunci $a + b + c = 11$ și $2(ab + bc + ca) = 72 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) =$$

$$= 121 - 72 = 49, \text{ deci } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm.}$$



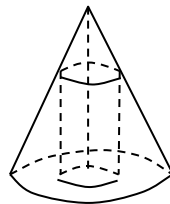
44. a) Egalând aria laterală a conului cu aria semicercului desfășurat, deducem că $G = 2R$, deci:

$$\gamma_{\text{con}} = \frac{\pi R^2 H}{3} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}.$$

b) Dacă notăm cu x raza cilindrului înscris și cu h înălțimea

sa, obținem: $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{H} = \frac{R-x}{R} = 1 - \frac{x}{a}$, de aici:

$$x = \frac{(3-\sqrt{3})a}{3}. \text{ Deci } h = \frac{\sqrt{3}H}{3} = R = a; \gamma_{\text{cil.}} = \pi x^2 h = \pi \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right)^2 a^3.$$



45. Avem: $R_1 G_1 = R_2 G_2$; $h_1 = R_1$; $G_1 = h_1 \sqrt{2}$; $h_2 = \frac{G_2}{2}$; $R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} G_2 = \sqrt{3} h_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}. \text{ Analog, } \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ și } \left(\frac{G_1}{G_2} \right)^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

46. Dacă E este centrul sferei înscrise în con, cu notațiile obișnuite, din asemănarea triunghiurilor VEB și VOA vom

putea scrie: $\frac{r}{R} = \frac{G-R}{I} \Rightarrow r = \frac{R(G-R)}{I}$. Relația cerută se

$$\text{scrie: } \frac{\pi R^2 I}{3} \geq 2 \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \Leftrightarrow R^2 I \geq 8 \cdot \frac{R^3 (G-R)^3}{I^3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (G-3R)^2 \geq 0$, evident, deci afirmația este adevărată.

47. Ținem cont de relațiile de asemănare care se formează în secțiunea axială a conului:

$\frac{h-r}{G} = \frac{r}{R} = \frac{G-R}{h}$, notațiile fiind cele cunoscute, și relația se dovedește imediat adevărată.

48. Dacă trunchiul de con are razele bazelor a și b , este circumscris sferei de rază R , vom avea:

$$\gamma_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3}; \gamma_{\text{tr. con}} = \frac{2\pi R}{3} (a^2 + b^2 + ab) \text{ și } R^2 = ab.$$

Deci $\gamma_{\text{tr. con}} - \frac{3}{2} \gamma_{\text{sferă}} = \frac{2\pi R}{3} (a-b)^2 > 0$, de unde:

$$\gamma_{\text{tr. con}} > \frac{3}{2} \gamma_{\text{sferă}}.$$

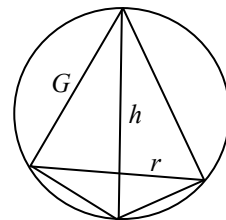
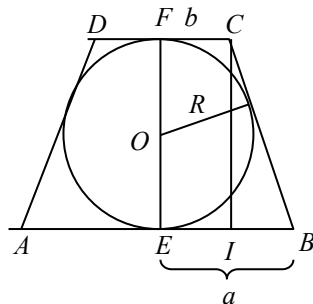
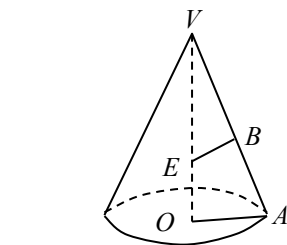
49. Din $h^2 = \left(\frac{r+G}{2} \right)^2 = G^2 - r^2$, unde r este raza bazei

și G generatoarea, rezultă: $r+G = 4(G-r)$ sau $3G = 4r$.

Pe de altă parte, din teorema catetei deducem: $G^2 = 2R$,

de unde $h = \frac{r+G}{2} = \frac{4r}{3}$, iar $r = \frac{24R}{25}$. De aici:

$$\gamma = \frac{3 \cdot 2^{11} \cdot \pi \cdot R^3}{5^6} \text{ și } \mathcal{A}_{\text{lat.}} = \pi r G = \frac{192\pi R^2}{125}.$$



$$50. m = \frac{\gamma_{\text{con}}}{\gamma_{\text{sferă}}} = \frac{\pi R^2 I}{3 \cdot \frac{\pi 4r^3}{3}} = \frac{R^2 I}{4r^3}; \quad \frac{\mathcal{A}_{\text{tot. con}}}{\mathcal{A}_{\text{sferă}}} = \frac{\pi R^2 + \pi R G}{4\pi r^2} = \frac{R(R+G)}{4r^2} = \frac{R}{4r^2} \cdot \frac{RI}{r} = \frac{R^2 I}{4r^3} = m.$$

51. Punctele de intersecție a celor două cercuri mari formează un diametru al sferei care, împreună cu un punct arbitrar al sferei, determină un triunghi înscris într-un semicerc mare, deci dreptunghic.

52. Cele două patrulatere sunt înscrise în două cercuri ($\mathcal{C}_1$) și ($\mathcal{C}_2$) de centre O_1 și O_2 care au coarda comună AB . Perpendicularele ridicate în punctele O_1 pe planul $ABCD$ și O_2 pe planul $ABEF$, fiind situate în planul mediator al lui AB , sunt concurente într-un punct O . Acest punct se află la egală distanță de cele 6 puncte, deci va fi centrul sferei ce conține cele 6 puncte.

ALGEBRĂ

1. Calcule cu numere reale reprezentat prin litere. Descompuneri în factori. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentat prin litere

1. Calcule cu numere reale reprezentat prin litere

1. 0. 2. 0.

2. Descompuneri în factori

6. $(a-b)(a^3 + 3a^2b + 5ab^2 - b^3).$

8. $(x-y)(2x+3y).$

10. $(x-1)(a+b+1).$

12. $3x(2x-1)(3x+2).$

14. $(a-x)(b-x)(c-x).$

16. $(x+1)(x+2)(x+3).$

18. $(x-1)(x^2-x+1).$

20. $(2x+3y+5)(3x+2y-1).$

22. $(-a+b+3c)^2.$

24. $(2x-1)^2.$

26. $(2x-3y)^2.$

28. $(xy-1)^2.$

30. $(2x-1)^3.$

32. $(2x-3y)^3.$

34. $(3x-y^2)(9x^2+3xy^2+y^4).$

36. $(x^6-y^3)^2 = (x^2-y)^2(x^4+x^2y+y^2)^2.$

38. $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1).$

40. $(x^2+\sqrt{2}xy^2+y^4)(x^2-\sqrt{2}xy^2+y^4).$

41. $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+1).$

42. $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^4-\sqrt{3}x^2+1)(x^4+\sqrt{3}x^2+1).$

43. $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4).$

7. $(a+b)(a^2+3ab-b^2).$

9. $(2x-3y)(3x+2y).$

11. $(a+2b-c)(2x+y).$

13. $(a-1)(b-1)(c-1).$

15. $(x+1)(y+1)(z+1).$

17. $(x+1)(x^2+x+1).$

19. $(a+b+1)(2a-b+3).$

21. $(a+b-2c)^2.$

23. $(x^2+x+1)^2.$

25. $(3x+y)^2.$

27. $(x^2+2y^3)^2.$

29. $(x+1)^3.$

31. $(5x+y)^3.$

33. $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2).$

35. $\left(\frac{1}{2}x^2-y^3\right)\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^3+y^6\right).$

37. $(x-1)(x+1)(x^2+1).$

39. $(x-y^2)(x+y^2)(x^2+y^4).$

$$44. E = (x - a + b)(x - a - b)(x + a - b).$$

$$45. E_1 = (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) = [(x^2 - 2x + 1) - 2] \cdot [(x^2 + 2x + 1) - 2] = [(x - 1)^2 - 2][(x + 1)^2 - 2] = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}); E_2 = (x^4 - 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 - 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x - 2) = [(x^2 - 2x + 1) - 3][(x^2 + 2x + 1) - 3] = [(x - 1)^2 - 3][(x + 1)^2 - 3] = (x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3}).$$

$$46. E = -8(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

$$47. E = -a^3 + a^2(b + c) + a(b^2 + c^2 - 2bc) + bc(b + c) - (b + c)(b^2 - bc + c^2) = -a^3 + a^2(b + c) + a(b - c)^2 - (b + c)(b - c)^2 = a^2(b + c - a) + (b - c)^2(a - b - c) = (b + c - a)[a^2 - (b - c)^2] = (b + c - a)(a - b + c)(a + b - c).$$

$$48. \text{Notăm: } x + y = a, y + z = b, x + z = c \text{ și } E \text{ se scrie: } E = ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) + 2abc = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc = a^2(b + c) + a(b^2 + c^2 + 2bc) + bc(b + c) = a^2(b + c) + a(b + c)^2 + bc(b + c) = (b + c)[a^2 + a(b + c) + bc] = (b + c)(a^2 + ab + ac + bc) = (b + c)[a(a + b) + c(a + b)] = (a + b)(b + c)(c + a). \text{ De unde, trecând la vechile notații: } E = (x + 2y + z)(2x + y + z)(x + y + 2z).$$

$$49. \text{Într-adevăr, putem scrie succesiv: } E = a^4(a^2 + 1) + a^2b^2(1 + b^2) - b^4(a^2 + b^2 - 1) = a^6 + a^4 + a^2b^2 + a^2b^4 - a^2b^4 - b^6 + b^4 = a^6 - b^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) + (a^4 + a^2b^2 + b^4) = (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 + 1) = [(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2](a^2 - b^2 + 1) = (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)(a^2 - b^2 + 1).$$

3. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentat prin litere

$$2. 1) \frac{a}{a+b}; 2) \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}; 3) \frac{-y(y+2x)}{x(x+y)}.$$

$$3. 1) \frac{1}{a+2x}; 2) \frac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}; 3) \frac{72}{a^2 - 3a + 9}; 4) \frac{x+2}{2}; 5) \frac{x+1}{(2y-x)(2x^2 + y+2)};$$

$$6) \frac{a+2}{a^{n+1}}; 7) -\frac{[2a(b+c)^n + 1]c}{2(a+n+1)}.$$

$$4. E = a - b.$$

$$5. E = \frac{[2(a^2 + 4a + 2) - 3a^2 - 5a - 4][2(a^2 + 4a + 2) + 3a^2 + 5a + 4]}{a(-a^2 + a + 6)} \cdot \frac{a+2}{5a^2 + 5a + 8a + 8} = \frac{(-a^2 + 3a)(5a^2 + 13a + 8)}{-a(a^2 - a - 6)} \cdot \frac{a+2}{5a(a+1) + 8(a+1)} = \frac{-a(a-3)(a+1)(5a+8)(a+2)}{-a(a+1)(5a+8)(a-3)(a+2)} = 1.$$

$$6. \text{Fracția se poate scrie: } F(x) = \frac{x^2(x+6) + 7(x+6)}{x^3 - 36x + 37x + 222} = \frac{(x+6)(x^2 + 7)}{(x+6)(x^2 - 6x + 37)} = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 6x + 9 + 28} = \frac{x^2 + 7}{(x-3)^2 + 28} > 0.$$

$$7. E = ab + bc + ca.$$

$$8. F(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + 2xy) + (x^2y + xy^2)}{(x^2 - y^2) + (x^2y - xy^2)} = \frac{(x+y)^2 + xy(x+y)}{(x+y)(x-y) + xy(x-y)} = \frac{(x+y)(x+y+xy)}{(x-y)(x+y+xy)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$10. \text{Problema se poate formula astfel: } ab + bc + ca = 0, \text{ de unde rezultă: } a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 =$$

$= 3a^2b^2c^2$. Utilizăm identitatea: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, în care luăm $x = ab, y = bc, z = ac$.

$$\begin{aligned} 13. E &= \frac{x^4(x+1) + x^3(x+1) + 2x^2(x+1) + x(x+1) + x+1}{x^3(x+1) - (x+1)} = \frac{(x+1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + x+1)}{(x+1)(x^3 - 1)} = \\ &= \frac{x^2(x^2 + x+1) + (x^2 + x+1)}{(x-1)(x^2 + x+1)} = \frac{x^2 + 1}{x-1}. \end{aligned}$$

$$14. 1) F_1(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+3)(x^2+2)}{(x-1)(x+1)(x+5)(x^2+2)} = \frac{x+3}{x+5}; 2) F_2(x) = \frac{(x+a)^2(x^2+b)}{(x+a)(x^2+b)(x^2-b)} = \frac{x+a}{x^2-b}.$$

$$\begin{aligned} 15. F(x, y) &= \frac{x^2(x-1) + 4xy(x-1) + 4y^2(x-1)}{x^2(x+2y) - 2x(x+2y) + (x+2y)} = \frac{(x-1)(x^2 + 4xy + 4y^2)}{(x+2y)(x^2 - 2x + 1)} = \\ &= \frac{(x-1)(x+2y)^2}{(x+2y)(x-1)^2} = \frac{x+2y}{x-1}. \text{ Se observă că pentru } y = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x, y) = 1. \end{aligned}$$

$$16. F = \frac{(x^{n+1} - xy - 2)(x^n - y)}{x(x^{n+1} - xy - 2)} = \frac{x^n - y}{x}.$$

$$17. F(x, y) = \frac{(2x+y-1)^2}{4x^2 - (y-1)^2} = \frac{(2x+y-1)^2}{(2x-y+1)(2x+y-1)} = \frac{2x+y-1}{2x-y+1}.$$

$$\begin{aligned} 18. E &= \frac{x}{a(x-3a)} - \frac{3}{x(x-3a) + (x-3a)} \left(1 + \frac{x(x+4)}{x+4} \right) = \frac{x}{a(x-3a)} - \frac{3}{(x-3a)(x+1)} \cdot (x+1) = \\ &= \frac{x}{a(x-3a)} - \frac{3}{x-3a} = \frac{x-3a}{a(x-3a)} = \frac{1}{a}; \text{ cu condițiile } x \neq -4, x \neq -1, x \neq 3a \text{ și } a \neq 0. \end{aligned}$$

$$19. F(n) = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{n^3 - 4n^2 + 4n} = \frac{n(n^2 + 4n + 4)}{n(n^2 - 4n + 4)} = \frac{(n+2)^2}{(n-2)^2}.$$

$$\begin{aligned} 20. E &= \frac{ax(x+a+b+1) + b(x+a+b+1)}{bx(x+a+b+1) + a(x+a+b+1)} = \frac{(x+a+b+1)(ax+b)}{(x+a+b+1)(bx+a)} = \frac{ax+b}{bx+a} \text{ pentru } a = -b \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= \frac{-bx+b}{bx-b} = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21. a) F(x) &= \frac{2x(x^k+1) + (x^k+1)}{x(x^k+1) + (x^k+1)} = \frac{(x^k+1)(2x+1)}{(x^k+1)(x+1)} = \frac{2x+1}{x+1}; \text{ b) Frația se poate scrie: } \frac{2x+1}{x+1} = \\ &= 2 - \frac{1}{x+1} \text{ și cum } \frac{1}{x+1} \text{ este ireductibilă, rezultă și } \frac{2x+1}{x+1} \text{ ireductibilă.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. a) E &= \frac{4a^2(2a+1) + 2ab(2a+1)}{6a^2(2a+1)} = \frac{2a(2a+1)(2a+b)}{6a^2(2a+1)} = \frac{2a+b}{3a}; \text{ b) } E > 0 \Leftrightarrow a(2a+b) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\begin{cases} a > 0 \\ 2a+b > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a < 0 \\ 2a+b < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$23. a) f(x) = \frac{x^2(a+1) - 2x(a+1) + (a+1)}{x-1} = \frac{(a+1)(x-1)^2}{x-1} = (a+1)(x-1);$$

$$b) f(x) = a+1 \Leftrightarrow (a+1)(x-1) = a+1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$24. E_1 = \frac{(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 4)}{(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)} = \frac{(x+1)(x+2)(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 4}{(x+3)(x+4)};$$

$$E_2 = \frac{4(x^2 + 7x + 12)}{2(x^2 + 3x + 4)} = \frac{2(x+3)(x+4)}{x^2 + 3x + 4}.$$

$$25. a) E = \frac{x+1}{x-1}; b) x \in \{-1, 0, 1\}; c) x \in \emptyset.$$

$$26. E_1 = \frac{x-y}{xy}; E_2 = x^3 + y^3.$$

$$27. 1) E(a) = \frac{-4a}{(a^2 - 1)^2}; 2) E\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{96}{25}.$$

$$28. a) E_1 = \left(\frac{a-b}{a} \cdot \frac{a-b}{ab}\right) \cdot \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2}\right) \cdot \frac{b^3 + 2ab^2 + a^2b}{a^2} = \frac{(a-b)^2}{a^2b} \cdot \frac{a^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{b(a+b)^2}{a^2} =$$

$$= \left(\frac{a+b}{a}\right)^2; E_2 = \frac{40x^2 - 15x + 25 + 6x^3 - 36x^2 + 54x - 29 - 39x + 5x^2 - 6x^3}{10x^2} \cdot \frac{5x}{3x-2} =$$

$$= \frac{9x^2 - 4}{10x^2} \cdot \frac{5x}{3x-2} = \frac{3x+2}{2x}; E_2 \text{ are sens pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{2}{3}\right\}.$$

$$29. \text{Grupând convenabil, vom obține: } F(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x^3 - x^2 - x - 5x^2 - 5x - 5}{x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{(x^2 + x + 1)(2x^2 - x - 5)}{(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)} = \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 - x^2 + 1}.$$

$$30. F(x, y) = \frac{(x-2y+1)(2x+y-4)}{(x-2y+1)(x-2y+3)} = \frac{2x+y-4}{x-2y+3} = 2 + \frac{5y-10}{x-2y+3} = 2 + \frac{5(y-2)}{x-2y+3}.$$

Pentru $y = 2 \Rightarrow F = 2$.

31. a) $F(x) = -1 + \frac{3}{x^2 - x + 2}$. Pentru ca $F(x) \in \mathbb{Z}$ este necesar ca $x^2 - x + 2 \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Însă ecuațiile $x^2 - x + 2 = 1$, $x^2 - x + 2 = -1$, $x^2 - x + 2 = 3$, $x^2 - x + 2 = -3$ nu au nicio soluție întreagă;

b) Ecuația $x^2 - x + 2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ admite soluții reale: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$32. a) F(x) = \frac{(x^4 - 1) + (2x^3 - 2) + (5x^2 - 5) + (4x - 4)}{(x^3 - 1) + (4x^2 - 4) + (x - 1)} = \frac{(x-1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 12)}{(x^2 + 5x + 6)(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x^2 + x + 6)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + x + 6}{x+3} = x - 2 + \frac{12}{x+3}; b) \text{În primul rând e necesar ca } \frac{12}{x+3} \in \mathbb{Z},$$

deci: $x+3 = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow F(-2) = -4 + 12 = 8 \in \mathbb{N}$; $x+3 = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow F(-1) = -3 + 6 = 3 \in \mathbb{N}$; $x+3 = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow F(0) = -2 + 4 = 2 \in \mathbb{N}$; $x+3 = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow F(1) = -1 + 3 = 2 \in \mathbb{N}$; $x+3 = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow F(3) = 1 + 2 = 3 \in \mathbb{N}$; $x+3 = 12 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow F(9) = 7 + 1 = 8 \in \mathbb{N}$; $x+3 = -1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow F(-4) = -6 - 12 = -18 \notin \mathbb{N}$; $x+3 = -2 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow F(-5) = -7 - 6 = -13 \notin \mathbb{N}$; $x+3 = -3 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow F(-6) = -8 - 4 = -12 \notin \mathbb{N}$; $x+3 = -4 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow F(-7) = -9 - 3 = -12 \notin \mathbb{N}$; $x+3 = -6 \Rightarrow x = -9 \Rightarrow F(-9) = -11 - 2 = -13 \notin \mathbb{N}$; $x+3 = -12 \Rightarrow x =$

$$= -15 \Rightarrow F(-15) = -17 - 1 = -18 \notin \mathbb{N}.$$

33. 1) Ținem cont de identitatea: $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$, în care $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; 2) Folosim 1), în care a, b, c sunt parantezele care verifică $a + b + c = 0$. Deci $F = \frac{3(x+2y+3z)(2x+3y+4z)(3x+5y+7z)}{3(x+2y+3z)(2x+3y+4z)(x+y+z)} = \frac{3x+5y+7z}{x+y+z}$.

$$\begin{aligned} \text{34. } F(x) &= \frac{x^5 + 1 + 2x(x^3 + 1) + 3x^2(x + 1)}{x^3(x + 1) - (x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3x^2)}{(x + 1)(x^3 - 1)} = \\ &= \frac{(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^2 + 1}{x - 1}; F(x) \text{ există pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{35. a) } E &= \frac{\frac{4ab - (1 + a^2)(1 + b^2) - 2b(1 + a^2) + 2a(1 + b^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}}{\frac{4ab - (1 + a^2)(1 + b^2) + 2b(1 + a^2) - 2a(1 + b^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}} = \\ &= \frac{4ab - 1 - a^2 - b^2 - a^2b^2 - 2b - 2ba^2 + 2a + 2ab^2}{4ab - 1 - a^2 - b^2 - a^2b^2 + 2b + 2a^2b - 2a - 2ab^2} = \\ &= \frac{-a^2(1 + b^2 + 2b) + 2a(2b + 1 + b^2) - (1 + b^2 + 2b)}{-a^2(1 + b^2 - 2b) - 2a(1 - 2b + b^2) - (b^2 - 2b + 1)} = \frac{-(b + 1)^2(a^2 - 2a + 1)}{-(b - 1)^2(a^2 + 2a + 1)} = \frac{(b + 1)^2(a - 1)^2}{(b - 1)^2(a + 1)^2}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } E(a, b) \cdot x = \sqrt{E(a, b)} \Leftrightarrow \frac{(b + 1)^2(a - 1)^2}{(b - 1)^2(a + 1)^2} \cdot x = \frac{(b + 1)(a - 1)}{(b - 1)(a + 1)} \Leftrightarrow x = \frac{(b - 1)(a + 1)}{(b + 1)(a - 1)}.$$

$$\begin{aligned} \text{36. a) } E(x, y) &= \frac{x^2(x - 1) + 4xy(x - 1) + 4y^2(x - 1)}{x^2(x + 2y) - 2x(x + 2y) + (x + 2y)} = \frac{(x - 1)(x^2 + 4xy + 4y^2)}{(x + 2y)(x^2 - 2x + 1)} = \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2y)^2}{(x + 2y)(x - 1)^2} = \frac{x + 2y}{x - 1}; \end{aligned}$$

b) $E(x, y)$ există pentru $x \neq 1, x + 2y \neq 0$;

c) Pentru aceste valori $E(x, y)$ nu se poate anula.

$$\text{37. } E(x) = \frac{(x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 5)}{(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)} = \frac{2x^2 - x - 5}{x^3 - x^2 + 1}.$$

$$\text{38. } E = \frac{x^{n+1}(x^n + 1) + (x^n + 1)^2}{x^{n+1}(x^n - 1) + (x^n + 1)(x^n - 1)} = \frac{(x^n + 1)(x^{n+1} + x^n + 1)}{(x^n - 1)(x^{n+1} + x^n + 1)} = \frac{x^n + 1}{x^n - 1}.$$

39. Utilizăm identitatea $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ și inegalitatea cunoscută: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

$$\text{41. } E = \frac{a(a + 2)[(a + 1)^2 + 1]}{a(a + 2)} - (a + 1)\sqrt{\frac{(a + 1)^2(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}} = (a + 1)^2 + 1 - (a + 1)^2 = 1.$$

$$\text{42. 1) } \frac{1}{abc}; 2) -c.$$

$$\text{43. } \frac{2}{b}.$$

47. Efectuăm calculele și vom obține:

$$E = \left[2 \cdot \frac{\frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{(a-b)(a+b)} + \frac{a+b+a-b}{\frac{(a-b)(a+b)}{a+b-a+b}} + \frac{4ab}{a^2 - (a^2 - 4b^2)} \right] : \frac{(a+b)^2}{ab} =$$

$$= \left[\frac{4(a^2 + b^2)}{-4ab} + \frac{2a}{2b} + \frac{4ab}{4b^2} \right] : \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{2a^2 - a^2 - b^2}{ab} \cdot \frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b};$$

$$a = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{12}}{\frac{1}{16}} = \frac{20+7}{12^2} \cdot 16 = 3; b = -5. \text{ Atunci înlocuim și obținem: } E = \frac{3+5}{3-5} = \frac{8}{-2} = -4.$$

48. $(a + 2b + c)(b + 2c + a)(c + 2a + b).$

50. $E = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + 3ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2(a + b) = 1 - 3ab + 3ab[(a + b)^2 - 2ab] + 6a^2b^2 = 1 - 3ab + 3ab(1 - 2ab) + 6a^2b^2 = 1.$

53. Pentru a verifica divizibilitatea prin $x - 1$ descompunem $E(x)$ în factori; $E(x) = x^3 - x^2 - x^2 + x - 6x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x^2 + 2x - 3x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$; $E(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 3.$

54. a) $E(x, y, z) = \frac{2(x^2 + 4xy + 4y^2) - 2y^2(x + 2y) + 2(x + 2y)}{z(x^2 + 4y^2 + 4xy) + z(x + 2y)} =$

$$= \frac{2(x + 2y)(x + 2y - y^2 + 1)}{z(x + 2y)(x + 2y + 1)} = \frac{2(x + 2y - y^2 + 1)}{z(x + 2y + 1)};$$

b) Pentru $y = 0, E = \frac{2(x+1)}{z(x+1)} = \frac{2}{z} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \{-2, -1, 1, 2\}.$

55. a) $F(n) = 3n^2 - 3n + 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \notin \mathbb{N}$; b) $[F(n)] = 3n^2 - 3n + 1.$ Atunci:

$$S = \sum_{k=1}^n [F(k)] = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = \sum_{k=1}^n [k^3 - (k-1)^3] = (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \dots +$$

$$+ (n^3 - (n-1)^3) = n^3.$$

56. a) $E = \frac{2ax(x^2 - a^2)}{x^2 + a^2}; E\left(\frac{1}{3}; -1\right) = \frac{8}{15}$; b) $P(x) + Q^2(x) - 3a^2x^2 = (x^2 + ax - a^2)^2.$

58. Numitorul se poate scrie: $bcy^2 + bcz^2 - 2bcyz + acz^2 + acx^2 - 2acxz + abx^2 + aby^2 - 2abxy =$

$$= c(ax^2 + by^2) + b(ax^2 + cz^2) + a(cz^2 + by^2) - 2bcy - 2acx - 2abxy - (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) -$$

$$- c^2z^2 - b^2y^2 - a^2x^2 - 2bcyz - 2acxz - 2abxy = (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - (ax + by + cz)^2.$$

Ținând cont de condiție, obținem: $E = \frac{1}{a+b+c}.$

4. Polinoame

1. Fie $P(x) = (ax + b)(x^2 + x - 2) = (x + 4)(x - 2)(cx + d) + 22x - 12$, în care facem $x = 2$ și $x = -4$ obținând astfel sistemul: $4(2a + b) = 32$; $10(-4a + b) = -100$, cu $a = 3, b = 2$. Atunci $P(x) = (3x + 2)(x^2 + x - 2).$

2. Conform identității împărțirii cu rest, vom scrie: $P(x) = (x - 1)(x - 3) \cdot Q(x) + mx + n$. Pentru

$x = 1: P(1) = 3 = m + n$. Pentru $x = 3: P(3) = 1 = 3m + n$, care ne dă: $m = -1; n = 4$. Deci $P(x) = -x + 4$.

3. Întrucât $Q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, vom utiliza teorema lui Bezout: $P(1) = 1 - 8 - a + 6a - 4a = 0 \Rightarrow a = 7$. Deci $P(x) = x^{13} - 8x^{10} - 7x^3 + 42x - 28$ pentru care și $P(2) = 0$, deci $P(x)$ este divizibil prin $x^2 - 3x + 2$ pentru $a = 7$.

4. E suficient să arătăm că $P(1) = Q(1) = 0$, evident, deoarece $P(1) = 4^m + 2^{2m} + (-2)^{2m+1} = 4^m + 4^m - 2 \cdot 4^m = 0$. Analog $Q(1) = 0$.

5. $R = P(1) = 1 - 5 + 7 - 3 = 0$; $P(x) = x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 3x - 3 = (x - 1)(x^2 - 4x + 3) = (x - 1)^2(x - 3)$. Dacă $x = 2p + 1, p > 1$, atunci: $P(x) = (2p)^2(2p - 2) = 8p^2(p - 1)$, dar $p(p - 1)$ este număr par, de aici rezultă că $P(x)$ este divizibil prin 16.

6. Pentru $k \in \mathbb{N}, P_k(x) = x^{5k+4} - x^4 + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^4[(x^5)^k - 1] + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^4(x^5 - 1)(x^{5(k-1)} + \dots + 1) + (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)[x^4(x - 1)(x^{5k-5} + x^{5k-10} + \dots + 1) + 1]$, divizorul comun fiind: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

7. a) $P(x) = x^{29} + x^{28} + x^{27} - x^{28} - x^{27} - x^{26} + x^{26} + x^{25} + x^{24} - x^{25} - x^{24} - x^{23} + x^{23} + x^{22} + x^{21} - x^{22} - x^{21} - x^{20} + x^{20} + x^{19} + x^{18} - x^{18} + x^{15} - x^{15} + x^{12} - x^{12} + x^9 - x^9 + x^6 - x^6 + x^3 - x^3 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^{27} - x^{26} + x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20} + x^{18}) - x^{15}(x^3 - 1) - (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = (x^2 + x + 1)[x^{27} - x^{26} + x^{24} - x^{23} + x^{21} - x^{20} + x^{18} - (x - 1)(x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)]$;

b) $Q(x) = (x^5 + 1)(x^{19} - x^{14} + x^9 - x^4 - x^8 + x^3 - x^2 + x) + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 =$
 $=$ multiplu de $(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

8. Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ și $Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m, a_0 + a_1 + \dots + a_n = P(1) = Q(0) = b_m$.

9. $P\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{d^2}{c^3}(bc - ad)$, de unde rezultă, conform teoremei lui Bezout, că $P : Q$ dacă și

numai dacă restul $P\left(-\frac{d}{c}\right) = 0$, adică $d^2(bc - ad) = 0$, cu $d = 0$ sau $bc - ad = 0$.

10. a) Punem condițiile $P(1) = P(-1) = P(3) = 0$ și obținem sistemul: $m + n + p = 7; m - n + p = -3; 9m + 3n + p = 81$, cu $m = 8, n = 5, p = -6$;

b) Din identitatea: $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)Q(x)$ deducem, prin împărțire $Q(x) = x^2 + x - 2$ cu rădăcinile 1 și -2. Deci $P(x) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 3; x_5 = -2$.

11. Observăm că $P(x) = (2x - 1)(2x - 2) \dots (2x - 10) \dots (2x - 15)$, în care factorul $2x - 10$ se anulează pentru $x = 5$. Deci $P(5) = 0$.

12. a) $R = P(2) = 2^{20} - 513 \cdot 2^{11} + 127 \cdot 2^4 + 7 \cdot 2 + 1 = 2^{11}(2^9 - 513) + 128 \cdot 2^4 - 1 =$
 $= 2^{11}(2^9 - 2^9 - 1) + 2^{11} - 1 = -1$;

b) $P(2) + |a| = 0 \Leftrightarrow -1 + |a| = 0 \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.

13. $P(x) = x(x + 2)x^{3n} + 4 \cdot 2^{3n} = (x^2 + 2x + 4)x^{3n} + 4(2^{3n} + x^{3n}) = (x^2 + 2x + 4)x^{3n} - 4(x^3 - 2^3)(x^{3n-3} + x^{3n-6} \cdot 2^3 + \dots + 2^{3n-3}) = (x^2 + 2x + 4)x^{3n} - 4(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^{3n-3} + \dots + 2^{3n-3}) =$
 $=$ multiplu de $(x^2 + 2x + 4)$.

14. $Q(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$. Este suficient să calculăm pe a din ecuația $P(-1) = 0$ care ne dă:
 $a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5$.

15. Este suficient să arătăm că restul împărțirii este zero. Conform teoremei lui Bezout, avem:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0. \text{ Fie } Q \text{ câtul împărțirii. Avem: } P(x) = (2x + 1) \cdot Q(x).$$

Pentru a calcula suma coeficienților lui Q , facem $x = 1$ și obținem: $P(1) = 2 \cdot 2^{n+1} + (-1)^{n+1} =$
 $= 2^{n+2} - (-1)^{n+2} = [2 - (-1)][2^{n+2} + 2^n \cdot (-1) + 2^{n-1}(-1)^2 + \dots + (-1)^{n+1}] = 3(2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} -$
 $- 2^{n-2} + \dots + (-1)^{n+1})$, deci $Q(1) = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1} - 2^{n-2} + \dots + (-1)^{n+1}$.

16. a) $S = \alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 2\beta + \gamma = (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 2) > 0 \Leftrightarrow \gamma - 2 > 0 \Leftrightarrow \gamma > 2$;

b) $S = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 + (\gamma - 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1; \beta = 1; \gamma = 2$, deci $P(x) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 + 1) = 0$ cu soluțiile reale: $x = 0$ și $x = 2$.

17. a) $P(1985) = 1985^4 - 1986 \cdot 1985^3 + 1987 \cdot 1985^2 - 1988 \cdot 1985 + 1986 = 1985^3(1985 - 1986) + 1985(1987 \cdot 1985 - 1988) + 1986 = -1985^3 + 1985(1986^2 - 1 - 1988) + 1986 = -1985^3 + 1985(1985 + 1)^2 - 1985 - 1985^2 - 3 \cdot 1985 + 1985 + 1 = -1985^3 + 1985(1985^2 + 2 \cdot 1985 + 1) - 1985^2 - 3 \cdot 1985 + 1 = 2 \cdot 1985^2 + 1985 - 1985^2 - 3 \cdot 1985 + 1 = 1985^2 - 2 \cdot 1985 + 1 = (1985 - 1)^2 = 1984^2$;

b) Fie $f(x) = P(x) + a$; $f(1985) = P(1985) + a = 1984^2 + a = 1986^2 \Rightarrow a = 1986^2 - 1984^2 = 2(1986 + 1984) = 2 \cdot 3970 = 7940$. Deci $a = 7940$.

18. a) Punem condițiile: $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ și $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ și rezultă: $m = -1$ și $n = 3$;

b) Cu aceste valori fracția devine: $F(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + x - 1}{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{(2x-1)(x^2 + x + 1)}{(2x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x-1}{2x+1}$;

c) $F(x) = \frac{2x-1}{2x+1} = 1 - \frac{2}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$; $2x+1 = -1 \Rightarrow x = -1$; $2x+1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $2x+1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

19. a) După grupări convenabile, $P(x) = (x^3 + 1)(x^2 - 5x + 4) = (x + 1)^2(x^2 - x + 1)(x + 4)$. De aici: $P(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ sau $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = -4$;

b) $P(x) > 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2(x^2 - x + 1)(x + 4) > 0 \Leftrightarrow x + 4 > 0$ și $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-4, -1) \cup (-1, \infty)$.

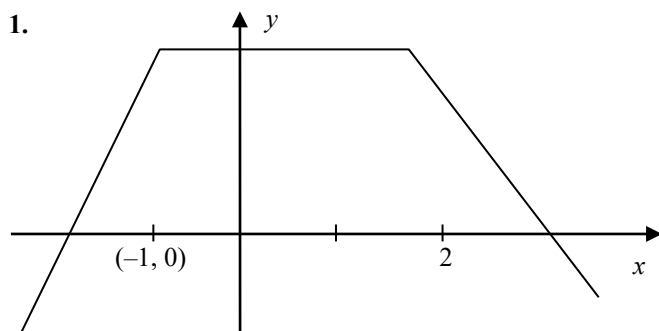
20. a) $E_1 = (x - 2a)(x - a)^2$; $E_2 = (x - a)(x + a)(x - 2a)$;

b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a, 2a\}$; $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^* = \frac{x-a}{x+a}$;

c) $\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^* = \frac{x-a}{x+a} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ pentru $a > 0$ și $x \in (-\infty, a) \cup (-a, \infty)$ pentru $a < 0$.

2. Funcții

1.



2. Pentru $x = \frac{1}{2}$ în a) obținem $f(1) + f(0) = 0$ (1). Pentru $x = 0$ și $x = 1$ în b) obținem $f(0) \cdot f(1) = f(0)$ și $f(1) \cdot f(0) = f(1) - 1$, de unde rezultă $f(1) - 1 = f(0)$ care înlocuită în prima ecuație ne dă $f(1) + f(1) - 1 = 0$ sau $f(1) = \frac{1}{2}$ (2). Pe de altă parte, $f(0) \cdot [f(1) - 1] = 0$ ne dă $f(0) = 0$

care în (1) ne dă $f(1) = 0$, contradicție cu (2) Dacă $f(0) \neq 0 \Rightarrow f(1) = 1$, contradicție cu (2). Deci nu există astfel de funcții.

3. a) Funcția care are reprezentarea grafică segmentul AB va fi de forma $f_1: [-2, 0] \rightarrow [0, 2]$, $f_1(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Din faptul că punctele A și B aparțin reprezentării grafice obținem:

$$\begin{cases} f_1(-2) = 0 \\ f_1(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f_1(x) = x + 2. \text{ Analog, funcția care reprezintă seg-}$$

mentul BC va fi: $f_2: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$, $f_2(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Din condiții, deducem:

$$\begin{cases} f_2(0) = 2 \\ f_1(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow f_2(x) = -x + 2. \text{ Deci funcția căutată va fi } f: [-2, 2] \rightarrow [0, 2],$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-2, 0] \\ -x + 2, & x \in (0, 2] \end{cases};$$

b) $AB = BC = 2\sqrt{2}$, iar $AC = 4$.

4. a) $M(1, 7) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 7 \Leftrightarrow m + 2 = 7 \Leftrightarrow m = 5$;

b) $f(-4) = -3$; $f(0) = 2$; $f(-1) = 3$; $f(1) = 7$; $f(3) = 17 > 7$.

Deci $B = \{-4, -1, 0, 1\}$, $A \cup B = A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{3\} \cup \emptyset = \{3\}$; $A \times B = \{(-4, -4), (-1, -4), (0, -4), (1, -4), (3, -4), (-4, -1), (-1, -1), (0, -1), (1, -1), (3, -1), (-4, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (3, 0), (-4, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (3, 1)\}$.

5. Trebuie ca $2(m+1) + m - 1 \geq 4 + \frac{3m}{2} \Leftrightarrow m \geq 2$.

6. Efectuăm transformarea: $x \rightarrow x - a$ și obținem: $f(x) \leq x - a$ și dacă ținem cont de a doua parte a inegalității, avem: $f(x) \geq x - a$, de unde $f(x) = x - a$.

8. $F(x) = \frac{(x^2 + 3)(x^2 + 4x + 1)}{(x^2 + 3)(x - 1)(x^2 - 3)} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x - 1)(x^2 - 3)}$. Cum $x^2 + 3 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, fracția atât înainte

de simplificare, cât și după admite domeniul de existență: $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\}$.

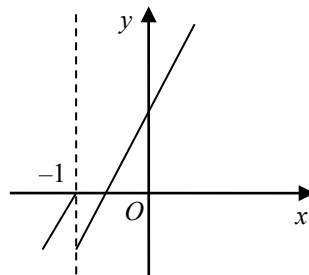
9. $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = k(a'x^4 + c'x^2 + e')$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$(a - ka')x^4 + bx^3 + (c - kc')x^2 + dx + (e - ke') = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică avem de-a face cu polinomul identic nul. De aici rezultă: $a - ka' = 0$; $b = 0$; $c - kc' = 0$; $d = 0$; $e - ke' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} = \frac{e}{e'} = k \text{ și } b = d = 0.$$

10-12. În cazul fig. 1) și 2) reprezentările geometrice respective nu pot defini funcții. Se observă, în cazul fig. 1, că pentru $x = -\frac{1}{2}$ corespund două valori pentru $f(x)$, iar în cazul fig. 2, pentru $x = 1$ corespund, la fel, două valori pentru $f(x)$. În cazul fig. 3, prezentarea grafică definește funcția: $f: [-2, 2] \rightarrow [0, 2]$ dată de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

13. 1) Se pune condiția ca punctele A și B să aparțină drepte de ecuație $y = ax + b$;



$$\begin{cases} -a+b=0 \\ 0 \cdot a+b=1 \end{cases} \text{ rezultă } a=b=1; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=x+1;$$

2) Se procedează în mod analog și se obține; $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{pentru } x \leq 0 \\ 2, & \text{pentru } 0 < x < 3; \\ -2x+8, & \text{pentru } x \geq 3 \end{cases}$

3) Se determină mai întâi coordonatele punctului C : $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{OA}{OC} \Rightarrow C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}x+2, & \text{pentru } x \leq 0 \\ 2, & \text{pentru } 0 < x < 3; \\ \sqrt{3}x+2-3\sqrt{3}, & \text{pentru } x \geq 3 \end{cases}$$

4) Se determină mai întâi coordonatele punctului B și apoi ale punctului C din triunghiurile

dreptunghice AOB și BOC . Rezultă $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ și $C\left(\frac{1}{3}, 0\right)$; $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, & \text{pentru } x \leq 0 \\ -\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$;

5) Pentru fig. 8 și fig. 10, triunghiul dreptunghic OMN rezultă: $x^2 + y^2 = 4$; $f_1: [-2, 2] \rightarrow [0, 2]$, $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$; $f_2: [-2, 2] \rightarrow [-2, 0]$, $f_2(x) = -\sqrt{4-x^2}$. Oricare ar fi punctul M pe dreaptă, întotdeauna triunghiul OMN este dreptunghic isoscel;

6) Pentru fig. 9 funcția este: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; 7) Pentru fig. 11, $f(x) = -x$.

14. a) $A(0, 1)$, $A \in Oy$, $A \in G_f$;

b) Cele două grafice intersectează axa Ox în punctele $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ și $C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ cu care for-

mează un triunghi isoscel de bază $BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ și înălțime $AO = 1$, care reprezintă $AO =$

$= \frac{BC\sqrt{3}}{2}$, adică triunghiul ABC este echilateral, deci $m(\angle A) = 60^\circ$.

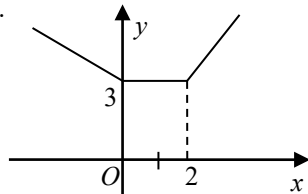
15. Notăm $f(x+1) = u$, $g(x-1) = v$; avem $2u + v = 2x + 14$; $u - 2v = 6x - 18$ cu $u = f(x+1) = 2(x+1)$; $u = g(x-1) = -2x + 10$. Deci $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$.

16. Luăm $y = 1$ și obținem: $f(x) + 1 = f(x+1) - x$ sau $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Dând lui x valorile $1, 2, \dots, n-1$, obținem: $f(2) - f(1) = 2$; $f(3) - f(2) = 3$; $\dots$; $f(n) - f(n-1) = n \Rightarrow f(n) - f(1) = 2 + 3 + \dots + n$ sau $f(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

17. Luăm $y = 0$ și obținem: $(x-2)f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $f(0) = 0$. Pe de altă parte, luăm $y = 1$ și avem: $f(x) = xf(1)$, ($\forall x \in \mathbb{R}$). Dacă $f(1) = \text{ct.}$, rezultă $f(x) = ax$.

18. Se observă că $f(x) = 3$ pentru orice $x \in [0, 2]$ și $f(x) > 3$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Singura valoare care verifică ecuația este $x = 0$.

19. Facem transformarea $x \rightarrow 1-x$ și obținem $2f(1-x) + f(x) = (1-x)^2$, care împreună cu relația dată, ne dă sistemul



în $f(x) = a$ și $f(1-x) = b$, și a cărei rezolvare ne oferă soluția: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{3}$.

20. Pentru $x \geq 0$, numitorul este nenul. Pentru $x < 0$, fie $y = -x, y > 0$.

Atunci $f(y) = \frac{\sqrt{1+y^2} - y - 1}{\sqrt{1+y^2} - y + 1}$ și ținând cont că $\sqrt{1+y^2} > y$, deci $\sqrt{1+y^2} - y + 1 > 1$, rezultă că

$$\begin{aligned} f \text{ este definită pentru orice } x \in \mathbb{R}; \quad f(-x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x - 1}{\sqrt{1+x^2} - x + 1} = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x - 1)(\sqrt{1+x^2} + x + 1)}{(\sqrt{1+x^2} - x + 1)(\sqrt{1+x^2} + x + 1)} = \\ &= \frac{-2x(\sqrt{1+x^2} + x - 1)}{2x(\sqrt{1+x^2} + x + 1)} = -\frac{\sqrt{1+x^2} + x - 1}{\sqrt{1+x^2} + x + 1} = -f(x). \end{aligned}$$

3. Ecuații și sisteme de ecuații

1. $x = 7$.

2. După efectuarea calculelor obținem (evident, punem condiția $2x - 7 \geq 0$):

$$\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x-7}}{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow 25 \cdot \frac{1}{25} = \sqrt{2x-7} \Leftrightarrow \sqrt{2x-7} = 1 \Leftrightarrow 2x - 7 = 1 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4.$$

3. $x = 2$.

4. 1) $x = 12,6$; 2) $x = -\frac{ab}{a+b}$; 3) $x = a^2 + 1$.

5. Ecuația este echivalentă cu $(ab - 1)x = ab - 1$. Dacă $ab \neq 1 \Rightarrow x = 1$. Dacă $ab = 1 \Rightarrow$ ecuația este nedeterminată.

6. Condiții: $x \notin \{0, \pm 1\}$. Efectuăm calculele:

$$\begin{aligned} \frac{19x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} : \left(\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} \right) &= x \Rightarrow \frac{19x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2+x}{x^2-1} = x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{19x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} &= x \Leftrightarrow \frac{19x-1}{x} + \frac{x+1}{x} = x \Leftrightarrow x = 20. \end{aligned}$$

7. a) $x \in \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$; b) $x \in (-\infty, -1]$.

8. Cazul 1: $x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow -2x - 1 - 2x + 1 = a \Leftrightarrow x = -\frac{a}{4}$ care este soluție dacă $-\frac{a}{4} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a \geq 2$.

Cazul 2: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow -2x - 1 - 2x + 1 = a \Leftrightarrow 2 = a$. Deci, pentru $a = 2$, orice $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ este soluție.

Cazul 3: $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{4} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \geq 2$.

9. Condiții: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, \pm\sqrt{3}\}$. Ecuația se scrie: $\frac{x}{x^2-3} : \frac{[x^2(x^4-9)+3(x^4-9)] \cdot (x-2)}{(x^2-3x+2)(x^2+3)^2} =$
 $= \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2-3} : \frac{(x^2+3)^2(x^2-3)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x^2+3)^2} = \frac{3}{x-1} \Leftrightarrow x = 3.$

10. Ecuația se poate scrie: $(3x^2-4x+1)^3 + (x^2+4x-5)^3 + (4-4x^2)^3 = 0$, care, dacă ținem cont că pentru $a+b+c=0$, avem: $a^3+b^3+c^3=3abc$, ne dă: $3(3x^2-4x+1)(x^2+4x-5)(4-4x^2)=0$, de unde $3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{1}{3}; x^2+4x-5=0 \Rightarrow x_3=1; x_4=-5; x^2-1=0 \Rightarrow x_5=1; x_6=-1.$

11. Descompunând în factori, obținem: $(5x+m+1)[(2x+1)^2-(2x+1)(3x+m)+(3x+m)^2-(4x+1)^2+(4x+1)(x+m)-(x+m)^2]=0 \Leftrightarrow (5x+m+1)[-6x^2+6x(m-1)]=0$. De unde $x_1=-\frac{m+1}{5}; 6x^2-6x(m-1)=0 \Rightarrow x_2=0; x_3=m-1.$

12. Notăm cu $f(x)$ membrul stâng al ecuației. Se deduce ușor că $f(x)=f(1-x)=f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ecuația dată se scrie $f(x)=f(a)$, de unde rezultă $f(x)=f(a)=f(1-a)=f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{1-a}\right)=f\left(1-\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\right)$, de unde soluțiile: $a, \frac{1}{a}, 1-a, \frac{1}{1-a}, 1-\frac{1}{a}, \frac{a}{a-1}.$

13. 1) Pentru $x \neq 3 \Rightarrow x = \frac{12-m}{10-m} = 1 + \frac{2}{10-m};$

2) $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{10-m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 10-m \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow m \in \{8, 9, 11, 12\}.$

14. 1) $x=3a; y=-2b$; 2) $x=(a+b)^2; y=(a-b)^2$; 3) $x=5; y=7$; 4) $x=5; y=6.$

15. $x=a; y=b.$

16. $x=2a+b; y=2a-b.$

17. Eliminând numitorii în prima ecuație obținem: $\begin{cases} x+13y-6xy=2 \\ 4x+47y-22xy=8 \end{cases}$, în care reducem

termenul xy . Deducem astfel $x=2y+2$. Înlocuind într-una din ecuații, vom obține ecuația:

$12y^2-3y=0$ sau $3y(4y-1)=0$. Soluția $y=0$ nu convine. Rezultă $y=\frac{1}{4}$ și $x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$

18. Notăm valoarea comună a rapoartelor egale cu $\frac{1}{r}$. Obținem: $x+y=7r, y+z=9r; x+z=$

$=8r$, pe care le înlocuim în ultima relație: $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot r^3 = 4032 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$. Deci:

$$\begin{cases} x+y=14 \\ y+z=18 \\ x+z=16 \end{cases} \text{ cu soluțiile: } x=6; y=8; z=10.$$

19. $x = \frac{1}{m(m+1)}; y = \frac{1}{m(m-1)}.$

20. 1) Sistemul se scrie:
$$\begin{cases} \frac{x-a}{(x-a)(y-b)} + \frac{x-a}{(x-a)(z-c)} = \frac{2a}{a^2 - (b-c)^2} \\ \frac{y-b}{(x-a)(y-b)} + \frac{y-b}{(y-b)(z-c)} = \frac{2b}{b^2 - (a-c)^2} \text{ sau} \\ \frac{z-c}{(x-a)(z-c)} + \frac{z-c}{(z-c)(y-b)} = \frac{2c}{c^2 - (a-b)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y-b} + \frac{1}{z-c} = \frac{2a}{(a-b+c)(a+b-c)} \\ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{z-c} = \frac{2b}{(b-a+c)(a+b-c)} \\ \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y-b} = \frac{2c}{(c-a+b)(c+a-b)} \end{cases} \text{ care prin sumare ne dă: } \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y-b} + \frac{1}{z-c} = \frac{-a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}, \text{ cu } x = 2a - b - c; y = 2b - a - c; z = 2c - a - b.$$

2) Din $a < b < c$ rezultă $x < y < z$.

21. Fie r valoarea comună a celor trei rapoarte. De aici: $x_1 = a_1 + rb_1$; $x_2 = a_2 + rb_2$; $x_3 = a_3 + rb_3$;
 $a_1 + a_2 + a_3 + r(b_1 + b_2 + b_3) = c \Rightarrow r = \frac{c - (a_1 + a_2 + a_3)}{b_1 + b_2 + b_3}$; $x_1 = \frac{a_1(b_2 + b_3) + b_1(c - a_2 - a_3)}{b_1 + b_2 + b_3}$ etc.

22. Notăm: $\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{b} = r \Rightarrow \frac{ax_1x_2x_3}{x_1x_2x_3b} = r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{a}{b} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$. De aici: $\frac{a}{x_1} = r \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1 = \frac{a}{r} = a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$; $x_2 = \frac{x_1^2}{a} = \frac{a^2}{a} \sqrt{\frac{b}{a}} = a\sqrt{\frac{b}{a}}$; $x_3 = \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{a^2 \cdot b}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt[4]{\frac{a}{b}} = b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

23. Fie r valoarea comună a rapoartelor. Atunci: $x + y + z = rd$; $y + z + t = ra$; $x + z + t = rb$;
 $x + y + t = rc$, pe care le sumăm și obținem: $x + y + z + t = \frac{r}{3}(a + b + c + d)$ deci $t = \frac{r}{3}(a + b +$
 $c - 2d)$; $x = \frac{r}{3}(-2a + b + c + d)$; $y = \frac{r}{3}(a - 2b + c + d)$; $z = \frac{r}{3}(a + b - 2c + d)$. Dar $xyzt = r^2$,

deci $r = \frac{9}{\sqrt{(a+b+c-2d)(a+b-2c+d)(a-2b+c+d)(-2a+b+c+d)}}$, care înlocuit în valorile lui t, x, y și z , obținem soluția sistemului.

24. Se observă că în mod necesar $m \neq 0$. Reducem pe x și obținem $(1 - m^2)y = 0$. Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow y = 0$ și $x = \frac{1}{m}$. Dacă $m = -1$, ambele ecuații sunt echivalente cu $x + y = -1$,

sistemul fiind astfel nedeterminat. Pentru $m = 1$, sistem de asemenea nedeterminat.

25. Să observăm mai întâi că $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, deoarece sunt radicali. Prima ecuație se mai poate scrie: $x_1^2 + x_1 = x_2^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = x_1 \geq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq x_1$. În mod analog obținem din aproape în aproape: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_8 \leq x_1$, care este echivalentă cu: $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_8$. Notăm cu x valoarea comună. În acest caz toate ecuațiile coincid și putem scrie: $x^2 + x = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$. Așadar, sistemul are unica soluție reală: $x_1 = x_2 = \dots = x_8 = 0$.

26. Notăm cu E partea stângă a ecuației și cu $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și observăm că:

$$E = \sum \frac{x - a_1}{s - a_1} = \sum \frac{s - a_1 + x - s}{s - a_1} = \sum \left(1 + \frac{x - s}{s - a_1} \right) = n + (x - s) \sum \frac{1}{s - a_1}. \text{ Ecuația devine astfel:}$$

$$E = n \Leftrightarrow n + (x - s) \sum \frac{1}{s - a_1} = n \Leftrightarrow (x - s) \sum \frac{1}{s - a_1} = 0, \text{ dar } s - s_i > 0, \text{ deci } \sum \frac{1}{s - a_1} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = s$, adică singura soluție: $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

27. Din relațiile $x - y = a$, $(x - y)(x + y) = b \Rightarrow a(x + y) = b \Rightarrow x + y = \frac{b}{a}$, de aici: $2x = a + \frac{b}{a} =$

$$= \frac{a^2 + b}{a} \Rightarrow x = \frac{a^2 + b}{2a}; y = \frac{b}{a} - x = \frac{b}{a} - \frac{a^2 + b}{2a} = \frac{b - a^2}{2a} \text{ și înlocuind în ultima relație obținem:}$$

$$\left(\frac{b + a^2}{2a} \right)^3 + \left(\frac{b - a^2}{2a} \right)^3 = c \Leftrightarrow 2b[(b + a^2)^2 + (b - a^2)^2 - (b^2 - a^4)] = 8a^3c \Leftrightarrow b(b^2 + 3a^4) = 4a^3c.$$

28. Ecuația se mai scrie: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2x - 2y - 2z - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = t = 1$.

29. Din prima relație deducem $xy + xz = -(yz + 1)$ sau $x(y + z) = -(yz + 1)$, iar din a doua relație: $y + z = -x(yz + 1)$, din care rezultă $x^2 = 1$ sau $x = \pm 1$. Dacă $x = 1 \Rightarrow yz + y + z = -1$ cu $y = \frac{-1 - z}{1 + z} = -1$. Pentru $x = -1 \Rightarrow y = 1$ și $z \in \mathbb{R}$. Deci grupele de soluții: $(1, -1, m)$; $(-1, 1, m)$ cu

permutările lor ($m \in \mathbb{R}$).

30. Notăm valoarea comună a rapoartelor cu x . Obținem sistemul:
$$\begin{cases} -2x + 3y + 5z = ar \\ 2x - 3y + 5z = br \\ 2x + 3y - 5z = cr \end{cases}, \text{ de}$$

unde $x = \frac{(b+c)r}{4}$; $y = \frac{(a+c)r}{6}$; $z = \frac{(a+b)r}{10}$. Înlocuind în ultima relație obținem $r =$

$$\frac{2d}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \text{ De unde } x = \frac{d(b+c)}{2\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} \text{ etc.}$$

4. Ecuația de gradul II

$$1. x_1 = 2; x_2 = \frac{3-5a}{2}; x_1 = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 3 - 5a = 1 \Leftrightarrow 5a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}.$$

2. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți (relațiile lui Viète) ne dau $x_1 + x_2 = m$; $x_1 x_2 = m$, deci relația dată devine: $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = (x_1 + x_2)[(x_2 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] \Leftrightarrow m^2 = m(m^2 - 3m) \Leftrightarrow m = m^2 - 3m \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow m(m - 4) = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

3. Expresia admite cea mai mare valoare atunci când $2 - 3x^2$ se anulează, deci când $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Această valoare maximă va fi $P_{\max} = 5$.

4. Calculăm $x_1 = \frac{5k-5+k-13}{12} = \frac{k-3}{2} \Rightarrow k \geq 3$; $x_2 = \frac{5k-5-k+13}{12} = \frac{k+2}{3}$; $\frac{k-3}{2} \in \mathbb{N}$ și $\frac{k+2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow k-3 = 2p$ și $k+2 = 3m$, $p, m \in \mathbb{N} \Rightarrow 2p+3 = 3m-2 \Rightarrow 2(p+1) = 3(m-1) \Rightarrow \Rightarrow p+1 : 3 \Rightarrow p+1 = 3s \Rightarrow p = 3s-1 \Rightarrow k = 6s+1$, $s \in \mathbb{N}^*$.

5. Notăm $x^2 - 4x + 3 = y$. Ecuația devine: $y + \frac{1}{2y+1} = 1 \Leftrightarrow 2y^2 + y + 1 = 2y + 1 \Leftrightarrow 2y^2 - y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 0$; $y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, cu $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Apoi $x^2 - 4x + 3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 5 = 0$;

$x_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-10}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}$. Aceste soluții sunt diferite de valorile care anulează numitorul $2x^2 - 8x + 7$.

6. Ecuația ordonată în variabila x : $5x^2 + 2x(4 - 13y) + 50y^2 - 46y + 15 = 0$ are discriminantul $\Delta_x = (4 - 3y)^2 - 5(50y^2 - 46y + 15) = -81y^2 + 126y - 59 = -[(81y^2 - 126y + 49) + 10] =$
 $= -[(9y - 7)^2 + 10] < 0$, ceea ce înseamnă că ecuația nu are soluții reale.

7. $P(x+1) = P(x) + 2x + 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + a(x+1) + 3 = x^2 + ax + 3 + 2x + 2 \Leftrightarrow a = 1$. Pentru acest a , discriminantul ecuației este: $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$, fapt care confirmă că ecuația nu admite rădăcini reale.

8. a) $E_1 = \frac{(x-a)(x+b)}{(x+a)(x+b)} = \frac{x-a}{x+a}$; $E_2 = \frac{(x+2)(x-b)}{(x-2)(x-b)} = \frac{x+2}{x-2}$; $E_3 = \frac{(x+3)(x+b)}{(x-2)(x+b)} = \frac{x+3}{x-2}$; E_1 există pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, -b\}$, E_2 există pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, b\}$, E_3 există pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -b\}$;

b) $E_1 \cdot E_3 + E_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-a}{x+a} \cdot \frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - a = 0$. Pentru ca $x = 3$ să fie rădă-

cină, trebuie ca: $18 + 15 - a = 0 \Rightarrow a = 33$. Pentru acest a , $x_2 = -\frac{33}{2 \cdot 3} = -\frac{11}{2}$.

9. a) $x_{1,2} = \frac{-(5a-7) \pm \sqrt{(5a-7)^2 - 16(3-5a)}}{4} = \frac{7-5a \pm (5a+1)}{4}$; $x_1 = \frac{7-5a+5a+1}{4} = 2$;

$x_2 = \frac{7-5a-5a-1}{4} = \frac{6-10a}{4} = \frac{3-5a}{2}$;

b) $x_1 = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 3 - 5a = 1 \Leftrightarrow 5a = 2$; $a = \frac{2}{5}$;

c) $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow 4 + \left(\frac{3-5a}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{3-5a}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$.

10. După grupări convenabile, expresia devine: $E(x, y) = (2y - x - 1)^2 + (x - 1)^2 + 1 \geq 1$. De aici rezultă $E_{\min} = 1$, care are loc atunci când $2y - x - 1 = 0$ și $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, y = 1$.

11. Într-adevăr, $\Delta = (3a + 4b)^2 - 24ab = 9a^2 + 16b^2 \geq 0$.

12. $F = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 4} \geq 0$; $E_{\min} = 0$ pentru $x = 1$.

13. Expresia dată se poate scrie astfel: $E = (x^2 - 4x + 4) + (x^2 y^2 - 4xy + 4) + (x^2 y^2 z^2 - 4xyz + 4) =$
 $= (x - 2)^2 + (xy - 2)^2 + (xyz - 2)^2$. Expresia este minimă atunci când parantezele se anulează

simultan: $x - 2 = 0$; $xy - 2 = 0$; $xyz - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, y = z = 1$.

14. a) Ecuația devine: $x^2 - (a + 1)x - (a + 2) = 0$ care are $\Delta = (a + 3)^2 \geq 0$;

b) Din calcul rezultă $x_1 = a + 2$; $x_2 = -1$. Relația devine: $(a + 2)^2 + 1 = a(a + 1)$ cu $a = -\frac{5}{3}$.

15. E suficient să arătăm că $\Delta = b^2 - 4ac$ este pătrat perfect. Într-adevăr, $\Delta = b^2 - 4c(4b - 16c) = b^2 - 16bc + 64c^2 = (b - 8c)^2$. Deci $x_{1,2} = \frac{-b \pm (b - 8c)}{2a} \in \mathbb{Q}$ și $x_{3,4} = \frac{-b \pm (b - 8c)}{2c} \in \mathbb{Q}$.

16. Dacă x este o rădăcină comună, reducem termenul în x^2 din cele două ecuații și obținem $(c - a)(bx + a + c) = 0 \Rightarrow x = -\frac{a + c}{b}$, pe care o înlocuim în prima ecuație și obținem $(a + c)^2 = b^2 \Leftrightarrow |a + c| = |b|$.

17. Să observăm că: $P(1) \cdot P(-1) = (a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2$. Relația dată devine: $(a + c)^2 - b^2 \leq (a - c)^2 \Leftrightarrow 4ac \leq b^2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$. Acest lucru este echivalent în continuare cu faptul că ecuația $P(x) = 0$ are rădăcini reale și deci se descompune în factori de gradul I.

18. a) Fie $h(x) = f(x) - g(x) = (a - c)(x^2 - 1)$, cu $h(-1) = h(1) = 0$ și $a - c > 0$. Cum $x_0 \in [-1, 1] \Rightarrow \Rightarrow h(x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) \leq g(x_0)$. Altfel, prin calcul direct;

b) Fie α o rădăcină comună. Atunci $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ și $c\alpha^2 + b\alpha + a = 0$. Eliminând termenii de gradul II, obținem: $\alpha = \frac{c + a}{b}$; prin înlocuire obținem: $a\left(\frac{c + a}{b}\right)^2 - \frac{b(c + a)}{b} + c = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a[(c + a)^2 - b^2] = 0 \Leftrightarrow a(c + a + b)(c + a - b) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$ sau $a - b + c = 0$.

19. Efectuând calculele, ecuația devine: $x^2 - (a + b)x + ab - c^2 = 0$ cu $\Delta = (a + b)^2 - 4ab + 4c^2 = (a - b)^2 + 4c^2 \geq 0$; $E = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2(x_1x_2)^2 = [(a + b)^2 - 2(ab - c^2)]^2 - 2(ab - c^2)^2 = (a + b)^4 - 4(a + b)^2(ab - c^2) + 4(ab - c^2)^2 - 2(ab - c^2)^2 = (a + b)^4 - 4(a + b)^2(ab - c^2) + 2(ab - c^2)^2$.

5. Rezolvarea în numere întregi a ecuațiilor

1. Ecuația se poate scrie: $3(xy - 6) = 4y^2$, de unde se observă că y este multiplu de 3 ($y = 3u$, $u \in \mathbb{Z}$), înlocuind obținem: $9xu - 36u^2 = 18 \Leftrightarrow xu - 4u^2 = 2 \Leftrightarrow u(x - 4u) = 2$; de aici, avem:

1) $u = 2, x - 4u = 1 \Rightarrow x = 9, y = 6$;

2) $u = 1, x - 4u = 2 \Rightarrow x = 6, y = 3$;

3) $u = -2, x - 4u = -1 \Rightarrow x = -9, y = -6$;

4) $u = -1, x - 4u = -2 \Rightarrow x = -6, y = -3$.

2. Efectuăm calculele și obținem: $xy + 5x + 2y + 10 - 2xy - 4x - 2y - 4 = 5 \Leftrightarrow -xy + x = -1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x(y - 1) = 1$, de unde $x = 1, y - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, y_1 = 2$ sau $x = -1, y - 1 = -1 \Rightarrow x_2 = -1, y_2 = 0$.

3. Din a doua ecuație deducem $z = y - x - 3 \Rightarrow z^2 = y^2 + x^2 + 9 - 2xy - 6y + 6x$, valoare pe care

o introducem în prima ecuație: $(x - y)(y - 3) = 6$. De unde: 1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - 3 = 6 \\ z = y - x - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \\ z = -4 \end{cases}$;

$$\begin{aligned}
2) \quad & \begin{cases} x-y=2 \\ y-3=3 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=6 \\ z=-5 \end{cases}; 3) \quad \begin{cases} x-y=3 \\ y-3=2 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=5 \\ z=-6 \end{cases}; 4) \quad \begin{cases} x-y=6 \\ y-3=1 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=4 \\ z=-9 \end{cases}; \\
5) \quad & \begin{cases} x-y=-1 \\ y-3=-6 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{cases}; 6) \quad \begin{cases} x-y=-2 \\ y-3=-3 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}; 7) \quad \begin{cases} x-y=-3 \\ y-3=-2 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}; \\
8) \quad & \begin{cases} x-y=-6 \\ y-3=-1 \\ z=y-x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

4. Din faptul că $y^z = x(yz - 1)$ rezultă că x divide pe y , deci $y = xt$ ($t \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x^z t^z = x(xtz - 1) \Rightarrow x^{z-1} t^z = xtz - 1$; cum partea dreaptă nu-l mai conține pe x ca factor, rezultă: $z - 1 = 0$, $z = 1$. De aici: $t = xt - 1 \Leftrightarrow t(x - 1) = 1 \Leftrightarrow t = 1$; $x - 1 = 1$, deci $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

5. Ecuația se poate scrie: $(9x^2 - 6xy + y^2) - x^2 = 5 \Leftrightarrow (3x - y)^2 - x^2 = 5 \Leftrightarrow (2x - y)(4x - y) = 5$, cu posibilitățile: 1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -9 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 4x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases}$;

$$4) \quad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

6. Ecuația se mai poate scrie astfel: $(x + 2)(y + 3) = 1$ care ne dă:

$$1) \quad \begin{cases} x + 2 = 1 \\ y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}; 2) \quad \begin{cases} x + 2 = -1 \\ y + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}.$$

7. Să rezolvăm în mulțimea numerelor naturale ecuația diofantică $19x + 85y = 1985 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1985 - 85y}{19} = 104 - 4y + \frac{9(1 - y)}{19} = 104 - 4y + 9u, \text{ unde am pus condiția } 1 - y = 19u$$

($u \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow x = 100 + 85u$, iar $y = 1 - 19u$. Deci în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ soluțiile sunt: $x = 100 + 85u$, $y = 1 - 19u$, $u \in \mathbb{Z}$ pentru a extrage soluțiile din $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, punem condițiile $x, y > 0$, de unde rezultă $u = 0 \Rightarrow x = 100$, $y = 1$, deci $A = \{(100, 1)\}$.

8. Într-adevăr, ecuația se mai poate scrie: $x^2 - 8x = y^2 - 8y \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 8(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 8) = 0$, cum $x \neq y \Rightarrow x + y - 8 = 0$. Pentru $x = n \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 8 - x = 8 - n \in \mathbb{N}$, deci $0 \leq n \leq 8$; $n = 0 \Rightarrow x = 0$, $y = 8$; ...; $n = 8 \Rightarrow x = 8$, $y = 0$.

9. Dacă, prin absurd, $x + y - xy = 1$, atunci $xy - x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 0$, de unde în mod necesar rezultă $x - 1 = 0$, adică $x = 1$ sau $y - 1 = 0$, cu $y = 1$, contradicție cu alegerea lui x și y .

10. Ecuația se poate scrie: $(x - 1)(y - 3)(z - 5) = 1$, de unde obținem cazurile:

$$\begin{aligned}
1) & x - 1 = 1, y - 3 = 1, z - 5 = 1 \Rightarrow x = 2, y = 4, z = 6; \\
2) & x - 1 = 1, y - 3 = -1, z - 5 = -1 \Rightarrow x = 2, y = 2, z = 4; \\
3) & x - 1 = -1, y - 3 = 1, z - 5 = -1 \Rightarrow x = 0, y = 4, z = 4; \\
4) & x - 1 = -1, y - 3 = -1, z - 5 = 1 \Rightarrow x = 0, y = 2, z = 6.
\end{aligned}$$

11. $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) - 2(x + y) = 1 \Leftrightarrow (x + y)(x - y - 2) = 1$, deci:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

12. Ecuația dată se mai scrie: $x^2(y + 1) = 180 \Leftrightarrow x^2(y + 1) = 4 \cdot 5 \cdot 9$, cu posibilitățile:

$x^2 = 9, y + 1 = 20 \Rightarrow x = 3, y = 19; x^2 = 4, y + 1 = 45 \Rightarrow x = 2, y = 44; x^2 = 36, y + 1 = 5 \Rightarrow x = 6, y = 4.$

13. $992 = 2^5 \cdot 31$. Deci ecuația se scrie: $x^2(x^{y-z} - 1) = 2^5 \cdot 31$, de unde rezultă $x = 2, z = 5$ și $2^{y-5} - 1 = 31$ sau $2^{y-5} = 32 = 2^5 \Rightarrow y - 5 = 5 \Rightarrow y = 10$.

14. După grupări convenabile, ecuația devine: $(3x - 2y)(2x - 3y) = 19$ cu posibilitățile: $3x - 2y = 19, 2x - 3y = 1$, cu $x = 11, y = 7$; $3x - 2y = -1, 2x - 3y = -19$, cu $x = 7, y = 11$; $3x - 2y = -19, 2x - 3y = -1$, cu $x = -11, y = -7$; $3x - 2y = 1, 2x - 3y = 19$, cu $x = -7, y = -11$.

15. Fie x și y cele două numere. Conform enunțului avem: $x = y^2 \cdot z$ ($z \in \mathbb{N}$) și $x - y^2 = 1975$; $y^2 + 1975 = y^2 z \Leftrightarrow y^2(z - 1) = 1975 \Leftrightarrow y^2(z - 1) = 5^2 \cdot 79 \Leftrightarrow y = 5, z = 80$ și $x = 2000$.

16. Ecuația se poate scrie: $x(y + 1)^2 = 75y$. De aici rezultă $y + 1 = \pm 5$ și $x = 3y$. Pentru $y + 1 = 5 \Rightarrow y = 4$, deci $x = 12$, iar dacă $y + 1 = -5 \Rightarrow y = -6$, deci $x = -18$.

17. Efectuând o descompunere în factori, obținem: $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 1001$ sau:

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13, \text{ de unde: } \begin{cases} x + 1 = 13 \\ y + 1 = 11 \\ z + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 6 \end{cases}.$$

18. Ecuația dată o putem scrie: $2x^2 - 2x(4 + y - z) + y^2 + 2z^2 + 2y - 16z + 35 = 0$, pe care o privim ca pe o ecuație de gradul II în x care are rădăcini reale, deci $\Delta_x \geq 0$, care se scrie:

$$\Delta_x = (4 + y - z)^2 - 2(y^2 + 2z^2 + 2y - 16z + 35) = -y^2 + 2y(2 - z) - 3z^2 + 24z - 54 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 2y(2 - z) + 3z^2 - 24z + 54 \leq 0 \text{ pentru care } \Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow (2 - z)^2 - 3z^2 + 24z - 54 = \\ = -2(z - 5)^2 \geq 0 \Rightarrow z = 5. \text{ Înlocuind în } \Delta_x \geq 0, \text{ obținem } y^2 + 6y + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (y + 3)^2 \leq 0 \Rightarrow y = \\ = -3. \text{ În fine, înlocuind în ecuația dată valorile obținute, vom obține: } 2(x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

19. Ecuația se scrie: $(2x - y)^2 + (y - 2)^2 = 0$, de unde rezultă: $2x = y = 2$, adică $x = 1; y = 2$.

20. Din condițiile $0 \leq \sqrt{x-3} \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$ și $0 \leq \sqrt{3-y} \leq 2, y \leq 3, 0 \leq 3-y \leq 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$ obținem perechile de soluții: $(3, -1); (7, 3)$.

21. Să observăm mai întâi că niciunul din numerele x, y, z, t nu poate fi 1. Dacă $x > 2$, atunci:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1. \text{ Rămâne că singura soluție este: } x = y = z = t = 2.$$

6. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al sistemelor de ecuații

1. $\frac{x}{y} = 8; x + 39 = 37 \cdot \frac{y}{3}$, de unde $y = 9; x = 72$.

2. Fie x, y, z, t cele 4 numere. Atunci $x + y + z + t = 396$ și $x + 5 = y - 5 = 5z = \frac{t}{5} = r \Rightarrow x = r - 5; y = r + 5; z = \frac{r}{5}; t = 5r$. De unde: $2r + 5r + \frac{r}{5} = 396 \Leftrightarrow \frac{36r}{5} = 396 \Leftrightarrow r = \frac{396 \cdot 5}{36} = 55 \Rightarrow x = 50; y = 60; z = 11; t = 275$.

3. Notăm cu x tot drumul și deci vom avea: $(x - 13) \cdot \frac{2}{5} + 13 = \frac{x}{2}$, deci $x = 78$ km și vom transforma în hectometri $x = 780$ hm. Mai are de străbătut $780 \cdot \frac{3}{5} - 130 = 338$ hm.

4. Prima echipă a realizat x piese, a II-a $4x$, a III-a $\sqrt{x \cdot 4x} = 2x$, a IV-a $\frac{4x+2x}{2} = 3x$, deci:

$10x = 100 \Rightarrow x = 10$. Întreaga producție reprezintă 200 de piese; I a realizat 10 piese, mai are de realizat 40 piese; a II-a a realizat 40 piese, mai are de realizat 10 piese, a III-a a realizat 20 piese, mai are de realizat 30 piese; a IV-a a realizat 30 piese, mai are de realizat 20 piese.

5. Conform enunțului dacă x și y sunt cele două numere, $x > y$, atunci $x^2 - y^2 = 1805$. Pe de altă parte, $x = 19u$, $y = 19v$, deci înlocuind obținem: $19^2 u^2 - 19^2 v^2 = 1805$, iar după simplificare: $u^2 - v^2 = 5$ sau $(u - v)(u + v) = 5$. Cum produsul a două numere naturale este un număr prim, rezultă că vom avea simultan: $u - v = 1$, $u + v = 5$, de unde rezultă că $u = 3$ și $v = 2$. De aici $x = 19 \cdot 3 = 57$ și $y = 19 \cdot 2 = 38$.

6. Din enunț, $10x + y = (x + y)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x(y - 5) + y^2 - y = 0$, ecuație de gradul II care are discriminantul $\Delta = (y - 5)^2 - y^2 + y = -9y + 25$ și care este pătrat perfect pentru $y = 0$ și $y = 1$. Pentru $y = 1 \Rightarrow x = 8$, deci numărul este 81.

7. Fie x numărul cel mai mic, y următorul și z numărul cel mai mare. Avem $y - x = z - y$; $xy = 85$; $yz = 115$. Din prima ecuație rezultă $z = 2y - x$; înlocuind pe z în ecuația a treia obținem $2y^2 - xy = 115$, dar cum $xy = 85$ rezultă că $2y^2 - 85 = 115$; $2y^2 = 200$; $x = 8,5$; $y = 10$; $z = 11,5$ (soluția $x = -8,5$; $y = -10$; $z = -11,5$ nu convine, deoarece $z < y < x$).

8. Fie x numărul elevilor. Fiecare trebuie să primească $\frac{72}{x}$. Rezultă ecuația: $(x - 3)\left(\frac{72}{x} + 4\right) = 72$.

9. $\frac{x+y+z}{3} = a$; $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} = b$. Trebuie să găsim $\frac{xy+yz+zx}{3}$. Din prima relație rezultă:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9a^2 \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{3} = \frac{3a^2 - b}{2}.$$

7. Identități

15. (1) $\Rightarrow$ (2). Fie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r \Rightarrow a = rb$; $c = rd$; $E = (a + b + c + d)(a - b - c + d) = (rb + b + rd + d)(rb - b - rd + d) = (r + 1)(b + d)(r - 1)(b - d) = (r^2 - 1)(b^2 - d^2)$; $F = (a - b + c - d)(a + b - c - d) = (rb - b + rd - d)(rb + b - rd - d) = (r - 1)(b + d)(r + 1)(b - d) = (r^2 - 1)(b^2 - d^2)$. Deci $E = F$.

Reciproc, (2) $\Rightarrow$ (1). Se fac calculele și se obține: $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

17. Din $\frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ rezultă $\frac{b-c}{bc} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow ab = ac + bc$. Analog, $\frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow ac = ad + cd$.

Atunci $E = a(d - c) + b(a - c) + c(d - a) = ad - ac + ab - bc + cd - ac = -cd + ac + cd - ac = 0$.

18. $a + b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 - 2ab \Rightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 = 1 - 4ab$; $E = a^4 + b^4 - 2a^3 - 2b^3 - 2a^2b^2 + a^2 - b^2 = 1 - 4ab - 2(a^3 + b^3) + (a^2 + b^2) = 1 - 4ab - 2[(a + b)^3 - 3ab(a + b)] + (a + b)^2 - 2ab = 1 - 4ab - 2(1 - 3ab) + 1 - 2ab = 0$.

19. Aducem la același numitor, care este: $(a - b)(b - c)(c - a)$ și calculăm numărătorul.

$E = (a - bc)(b - c) + (b - ac)(c - a) + (c - ab)(a - b) = ab - b^2c - ac + bc^2 + bc - ac^2 - ab + a^2c + (a - b)(c - ab) = c(a^2 - b^2) - c^2(a - b) - c(a - b) + (a - b)(c - ab) = (a - b)(ac - bc - c^2 - c + c - ab) = (a - b)(ac + bc - c^2 - ab) = (a - b)[b(c - a) - c(c - a)] = (a - b)(b - c)(c - a)$.

20. Prima relație este echivalentă cu: $\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+xz} = 0 \Leftrightarrow \sum (1+xy+yz+xy^2z) =$
 $= 3 + 2\sum xy + xyz \sum x = 0$ și ținând cont că $\sum x = 0 \Rightarrow 3 + 2(xy + yz + xz) = 0$, de unde
 $xy + yz + zx = -\frac{3}{2}$.

21. $E = (a+b)^2 - (a+b) + 1 = 7$.

22. Din identitatea: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$ rezultă $ab+bc+ca=0$, iar din identitatea: $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$ rezultă $abc=0$.

23. 1) Se folosește identitatea: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$;

2) Din $(a+b+c)^2 = 0$ rezultă: $a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$, pe care o ridicăm la pătrat și obținem: $a^4+b^4+c^4 = 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ac+2c^2ab) = 4[a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(b+c+a)] = 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$;

3) Din $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ rezultă: $(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2) = 3abc(a^2+b^2+c^2)$. Transformând membrul stâng, obținem: $a^5+b^5+c^5+a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c) = 3abc(a^2+b^2+c^2)$ sau: $a^5+b^5+c^5-a^2b^2c-a^2c^2b-b^2c^2a = 3abc(a^2+b^2+c^2)$. Deci: $a^5+b^5+c^5-abc(ab+bc+ca) = 3abc(a^2+b^2+c^2)$ și ținând cont că $-2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2$ rezultă relația 3).

4) Conform cu 1) și 3) avem: $3(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2) = 5abc(a^2+b^2+c^2) =$
 $= 15abc \cdot \frac{2(a^5+b^5+c^5)}{5abc} = 6(a^5+b^5+c^5)$.

5) Înmulțim relațiile 1) și 2) și obținem: $2[a^7+b^7+c^7+a^3b^3(a+b)+a^3c^3(a+c)+b^3c^3(b+c)] =$
 $= 3abc(a^2+b^2+c^2)^2$ sau: $2(a^7+b^7+c^7-a^3b^3c-a^3c^3b+b^3c^3a) = 3abc(a^2+b^2+c^2)^2$, de unde:
 $2(a^7+b^7+c^7)-2abc(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) = 3abc(a^2+b^2+c^2)^2$, dar $a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 =$
 $= \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$. De aici rezultă: $2(a^7+b^7+c^7) = \frac{7}{2}abc(a^2+b^2+c^2)^2$ și ținând cont de 3),
 obținem relația cerută.

8. Inegalități

18. 1) Prima inecuație este echivalentă cu $\frac{4x-3}{2-x} \geq 0$, cu $x \in \left[\frac{3}{4}, 2\right)$.

2) Condiția de existență a radicalului împreună cu inecuația, ne dă sistemul $0 \leq \frac{3x-1}{2-x} < 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right).$$

19. 1) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{4}\right] \cup (3, \infty)$; 2) $x \in (2, 3) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$.

20. Inecuația este echivalentă cu $\frac{mx-2m+2}{m-2} > 0$. Analizăm pe cazuri:

1) $m \in (-\infty, 0) \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow mx-2m+2 < 0 \Rightarrow mx < 2m-2 \Rightarrow x > \frac{2m-2}{m}$;

2) $m = 0 \Rightarrow -x > 1-x$, imposibil;

$$3) m \in (0, 2) \Rightarrow mx < 2m - 2 \Rightarrow x < \frac{2m-2}{m};$$

$$4) m > 2 \Rightarrow mx - 2m + 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2m-2}{m}.$$

21. Inecuația este echivalentă cu: $\frac{x^2 - x + 1}{x-1} + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 1}{x-1} < 0$. Dar $2x^2 - x + 1 = x^2 +$
 $+ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, deci $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

22. $x \in (-6, 4]$.

23. $4a^2 - 7ab + 5b^2 = 4a^2 - 4 \cdot \frac{7ab}{4} + \frac{49b^2}{16} + 5b^2 - \frac{49b^2}{16} = \left(2a - \frac{7b}{4}\right)^2 + \frac{31b^2}{16} > 0$.

24. Partea stângă a inegalității se poate scrie: $-(a^2 + b^2 + c^2) \leq 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 0$.
 În acest caz, egalitatea are loc când $a + b + c = 0$. Pentru a doua inegalitate, putem scrie:
 $ab + bc + ca \leq 3 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, cu egalitate când $a = b = c$.

25. Din $1 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$ deducem $ab \leq \frac{1}{4}$; $\frac{1}{ab} \geq 4$; $-2ab \geq -\frac{1}{2}$ și $a^2 + b^2 = 1 - 2ab \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Deci $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 4 \geq \frac{1}{2} + 8 + 4 = \frac{25}{4}$.

26. 1) $1 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \geq 4ab - 2ab = 2ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{2}$. Luăm $a = -a'$ și deci $-a'b \leq$
 $\leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a'b \geq -\frac{1}{2}$ și prima dublă inegalitate este dovedită.

2) $1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq |ab + bc + ac|$, de unde: $-1 \leq ab + bc + ac \leq 1$.

27. $c(a + b) = (ax^2 + by^2)(a + b) = a^2x^2 + b^2y^2 + ab(x^2 + y^2) \geq a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy = (ax + by)^2$.

28. Din $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ deducem $a + b = ab$. Folosim inegalitatea mediilor $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, obținem
 că: $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4(a + b) \Leftrightarrow a + b \geq 4$.

29. Folosim inegalitatea mediilor: $x, y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$;

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{a+b}$; $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{bc}} \geq \frac{4}{b+c}$; $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{ca}} \geq \frac{4}{c+a}$, de unde:

$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$, care prin împărțire la 4 ne dă inegalitatea dată.

30. 1) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$, evident;

2) $\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3 \Leftrightarrow 3a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3b^3 \geq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a^2(a - b) - b^2(a - b) \geq 0$; $(a - b)^2(a + b) \geq 0$.

31. Putem scrie: $0 > a^3 + b^3 + 3abx = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abx \geq x(a^2 - ab + b^2) + 3abx = x(a^2 + 2ab + b^2) = x(a+b)^2$, deci $x(a+b)^2 < 0$, de unde $x < 0$, întrucât $(a+b)^2 > 0$.

32. Inegalitățile sunt echivalente cu $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ sau $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$.

33. Din $0 < a < b < c$ rezultă: $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a} \Leftrightarrow a < \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. În

mod analog, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{3}{c} \Leftrightarrow c > \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

34. $1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + (b+c)^2 + 2a(b+c) = a^2 + (b+c)^2 + 2a(1-a) \Rightarrow a^2 + (b+c)^2 = 1 + 2a^2 - 2a = 2\left(a^2 - a + \frac{1}{2}\right) = \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + \sqrt{b^2 + (a+c)^2} + \sqrt{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Pe de altă parte, $a^2 + (b+c)^2 = a^2 + (1-a)^2 = 1 + 2a(a-1) < 1$, deoarece din enunț rezulta că $a, b, c \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt{a^2 + (b+c)^2} + \sqrt{b^2 + (a+c)^2} + \sqrt{c^2 + (a+b)^2} < 3$.

35. Conform condițiilor, vom avea:

$$\begin{cases} 1 \leq x+1 \leq 9 \\ 4 \leq 2y+2 \leq 16 \\ 16 \leq z+16 \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{x+1}}{2} \leq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2y+2}}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{2} + \frac{\sqrt{2y+2}}{4} + \frac{\sqrt{z+16}}{2} \leq 5. \\ 2 \leq \frac{\sqrt{z+16}}{2} \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

36. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ca$, care prin înmulțire ne dă prima inegalitate. În mod analog procedăm pentru a doua.

$$\mathbf{37.} \left(\frac{ax}{y} + b\right)^2 + \left(\frac{ay}{x} + b\right)^2 = a^2 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2b^2 + 2ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2a^2 + 2b^2 + 4ab = 2(a+b)^2.$$

38. Prima parte a inegalității se scrie: $\frac{2^n}{3^n} < \frac{1+2^n}{1+3^n} \Leftrightarrow 2^n + 2^n \cdot 3^n < 3^n + 2^n \cdot 3^n \Leftrightarrow 2^n < 3^n$, evi-

dent. Pentru a doua parte, $\frac{1+2^n}{1+3^n} < \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \Leftrightarrow (1+2 \cdot 2^{n-1})3^{n-1} < 2^{n-1}(1+3 \cdot 3^{n-1}) \Leftrightarrow 3^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} < 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} < 2^{n-1} + 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1}(2^{n-1} - 1) + 2^{n-1} > 0$, relație de ascendență evidentă pentru $n \geq 1$.

39. Prima parte a inegalității este echivalentă cu: $ax + b \leq ax + bx \Leftrightarrow b(x-1) \geq 0$, evident.

Analog partea a doua $ax < ax + b \Leftrightarrow b > 0$.

$$\mathbf{40.} (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq$$

$\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Am ținut cont că dacă $x > 0$, atunci $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

41. $\frac{1}{a} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} > 0$; $\frac{1}{b} = \frac{z}{y} + \frac{x}{y} > 0$ și $\frac{1}{c} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} > 0$, de unde: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) \geq 6$, deoarece am ținut cont de faptul că dacă $A > 0$, atunci $A + \frac{1}{A} \geq 2$.

42. Din $a + b = c + d \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd$.

1) De aici $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(cd - ab) < 0$ și deci $cd < ab \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2 + d^2$ și reciproc.

2) $ab > cd \Rightarrow -2ab < -2cd$ și $a^2 + b^2 < c^2 + d^2$, de unde: $(a - b)^2 < (c - d)^2 \Leftrightarrow |a - b| < |c - d|$.

3) $a^2 + b^2 < c^2 + d^2 \Rightarrow$ conform cu 1) $ab > cd$ sau $-2ab < -2cd \Rightarrow (a - b)^2 < (c - d)^2 \Leftrightarrow |a - b| < |c - d|$.

43. Din $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow a + b \leq 10 - 2 = 8$. Pe de altă parte, $S = 10 = a + b + \frac{a^2 + b^2}{ab} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} = 10 - (a + b) \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} = 12 - (a + b) \Leftrightarrow \frac{(a + b)^2}{12 - (a + b)} = ab. \text{ Din } a + b \leq 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(a + b) \geq -8 \Leftrightarrow 12 - (a + b) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{12 - (a + b)} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow ab = \frac{(a + b)^2}{12 - (a + b)} \leq \frac{(a + b)^2}{4} \leq \frac{64}{4} = 16.$$

44. Notăm $a - b = x$ și ridicăm succesiv relația la pătrat: $a^2 + b^2 = x^2 + 2ab \Rightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = x^4 + 4a^2b^2 + 4abx^2 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = x^4 + 2a^2b^2 + 4abx^2$. Astfel inegalitatea din problemă revine la: $x^4 + 2 + 4x^2 + 7 \geq 10x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 \geq 0$, care este adevărată. Egalitate avem pentru $(a - b)^2 = 3 \Leftrightarrow a - b = \pm\sqrt{3}$.

45. Utilizând inegalitățile cunoscute: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ și $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$) obținem: $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx > 2(xy + yz + zx) > \sqrt{x^2yz} + \sqrt{xy^2z} + \sqrt{xyz^2} =$

$$= \sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

46. Ordonăm ecuația dată după x , astfel: $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x(y + 1) + (y - 1)^2 = 0$, cu $x = y + 1 \pm 2\sqrt{y} = (\sqrt{y} \pm 1)^2 \geq 0$, și analog $y = (\sqrt{x} \pm 1)^2 \geq 0$. Dacă $x > 1$, $y < x \Rightarrow \sqrt{x} = 1 + \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$, iar dacă $x < 1$, $y < 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

47. Relațiile date se scriu: $x^2 + y^2 + z^2 + 2(x + 2y + 3z) = 299$ și $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2y + 3z) = 91$, de unde: $x^2 + y^2 + z^2 = 195$ și $x + 2y + 3z = 52$. Așadar, inegalitatea dată devine: $13 \cdot 195 < 52^2 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 < 4^2 \Leftrightarrow 15 < 16$ evident.

48. Plecăm de la inegalitatea: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 9 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) +$

$$+ 1 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 9; \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6, \text{ evidentă, deoarece } x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0.$$

49. Plecăm de la identitatea lui Lagrange: $(ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$, de unde rezultă imediat inegalitatea.

50. În inegalitatea: $(am + bn + cp)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)$ luăm $a = b = c = 1$ și $m = \sqrt{x}$, $n = \sqrt{y}$, $p = \sqrt{z}$; $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3(x + y + z) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}$.

51. Inegalitatea dată este echivalentă cu: $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 \geq 0$, care, după grupări convenabile, se poate scrie: $(x^2 - 2x + 1)(2x^2 + x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \right] \geq 0$, care este evidentă.

$$\begin{aligned} \mathbf{52.} \quad x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 3 &= x^2(x^2 - x + 1) + 2(x^2 + x + 1) + 1 = x^2 \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] + \\ &+ 2 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right] + 1 > 0. \end{aligned}$$

53. Pentru $x = 1$, P_1 devine: $0 > 0$, fals. Deci P_2 este adevărată. Din faptul că $|x^2 + 1| \geq 1$ și $|x^2 - 1| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că P_3 este adevărată.

$$\begin{aligned} \mathbf{54.} \quad \text{Inecuația se transformă după cum urmează: } \frac{x+1}{x^2+x+1+2x+1} < 1 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+3x+2} < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} < 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+2} < 1, x+1 \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty), x > 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in (2, \infty) &\Rightarrow x \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{55.} \quad x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 = (x^4 + y^4)^2 + 2x^2y^2 \Rightarrow (x^4 + y^4)(1 - x^4 - y^4) = 2x^2y^2 > 0, \text{ de unde } 1 - x^4 - y^4 > 0 \Rightarrow x^4 + y^4 < 1.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{56.} \quad \text{Să determinăm semnul expresiei: } E &= (x+y) \left(x^2 + y^2 - \frac{7}{3} \right) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 - \frac{7}{3}(x+y) \leq \\ &\leq x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - x^3 = 2y^3 + x^2y + xy^2 = y(2y^2 + x^2 + xy) < 0, \text{ dar } x+y < 0, \text{ de unde} \\ &\text{rezultă } x^2 + y^2 - \frac{7}{3} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{57.} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} &\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \leq 2(a+b) \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ evident și} \\ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq \sqrt[3]{4(a+b)} &\Leftrightarrow a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \leq 4(a+b) \Leftrightarrow \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \leq a + b \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) &\leq (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 &\geq 0. \text{ Adunând aceste inegalități, obținem inegalitatea cerută. Egalita-} \\ &\text{tea are loc dacă și numai dacă } a = b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{58.} \quad \text{Inegalitatea dată se descompune în } n \text{ inegalități de forma: } \sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} &< 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - a + x + a + 2\sqrt{x^2 - a^2} &< 4x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - a^2} < x, \text{ evidentă.} \end{aligned}$$

$$\mathbf{59.} \quad \text{Inegalitatea este echivalentă cu: } \frac{(x-2)^2}{(x+y-xy)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-y)^2 < (x+y-xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + 4xy - 2x^2y - 2xy^2 > 0 \Leftrightarrow xy(x-2)(y-2) > 0 \text{ care este adevărată.}$$

$$\mathbf{60.} \quad E = (x-1)(y-1)(z-1) + 1 - m. \text{ Cum } x-1 \geq 0, y-1 \geq 0, z-1 \geq 0, E \geq 1 \Leftrightarrow 1-m \geq 1 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

9. Diverse

$$\mathbf{1.} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 6\}; B = \{1, 3, 4, 5\}.$$

2. Ecuațiile $x^2 + x = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x - 1}{x - 1}$ și $x^2 + x = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x + 1}{x + 1}$ au sens pentru $x \neq \pm 1$, deci în aceste condiții ele se vor scrie: $x^2 + x = 2$ ce au ca soluție $x = 1$ și $x = -2$; $x = 1$ nu este soluție; $x = -2$ este soluție pentru ecuațiile de la mulțimile A și B , deci $A = B = \{-2\}$.

3. a) $N = 2^7 - 2^6 - 2 = 2^6(2 - 1) - 2 = 2^6 - 2 = 2(2^5 - 1) = 2 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) =$

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5. \text{ Am ținut cont de identitatea: } \frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}.$$

b) Analog $M = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2}) = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1}.$

4. Putem scrie succesiv: $\frac{a^2 + 3b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \frac{(5 - 2\sqrt{6})^2 + 3}{(5 - 2\sqrt{6})^2 - 1} = \frac{13 - 5\sqrt{6}}{12 - 5\sqrt{6}}.$

5. Egalitatea este echivalentă cu: $(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - (2 + \sqrt{3})^n - 1 + (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n - 1 - (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n = 0 \Leftrightarrow 2(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 2 \Leftrightarrow [(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]^n = 1 \Leftrightarrow 1^n = 1$ evident.

6. $E = \frac{3 \cdot (-1)^m + 7 \cdot (-1)^n}{2} = \begin{cases} 5, & \text{pentru } m, n \text{ pare} \\ \pm 2, & \text{pentru } m \text{ și } n \text{ de parități diferite} \\ -5, & \text{pentru } m, n \text{ impare} \end{cases}$

7. Egalitatea se poate scrie: $(x^2 + 2x + 1)^2 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow (x + 1)^4 = (x + 1)^4$, care este evidentă $\forall x > 6$.

8. 1.

9. Frația se mai poate scrie: $F = \frac{7 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+5} + 2 \cdot 2^{3n}}{9 \cdot 2 \cdot 2^n + 23 \cdot 43^n} = \frac{7 \cdot 49^n + 32 \cdot 8^n + 2 \cdot 8^n}{18 \cdot 2^n + 23 \cdot 43^n} = \frac{7 \cdot 49^n + 34 \cdot 8^n}{18 \cdot 2^n + 23 \cdot 43^n} = \frac{7(49^n - 8^n) + 41 \cdot 8^n}{18(2^n - 43^n) + 41 \cdot 43^n}$ și dacă ținem cont că $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) =$ multiplu de $(a - b)$ rezultă: $F = \frac{7(49 - 8)(49^{n-1} + \dots + 8^{n-1}) + 41 \cdot 8^n}{41 \cdot 43^n - 18(43 - 2)(43^{n-1} + \dots + 2^{n-1})}$, de unde se

vede că 41 se dă factor și se simplifică.

10. Fie $n = 2u, m = 2v, q = u + v, u, v \in \mathbb{N}$. Facem ipoteza $A > B$ care este echivalentă cu:

$$\frac{10^{2u} + 1}{10^{u+v} + 1} > \frac{10^{u+v} + 1}{10^{2v} + 1} \Leftrightarrow (10^{2u} + 1)(10^{2v} + 1) > (10^{u+v} + 1)^2 \Leftrightarrow 10^{2u+2v} + 10^{2u} + 10^{2v} + 1 > 10^{2u+2v} + 2 \cdot 10^{u+v} + 1 \Leftrightarrow 10^{2u} + 10^{2v} > 2 \cdot 10^{u+v} \Leftrightarrow (10^u - 10^v)^2 > 0, \text{ relație evidentă pentru } u \neq v, \text{ deci } A > B.$$

11. Fie x numărul cerut. Atunci: $\frac{3+x}{8+x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 12.$

12. Putem scrie: $\sqrt{n} < 1 + \sqrt{29} \Leftrightarrow n < 30 + 2\sqrt{29} \Leftrightarrow (n - 30)^2 < 116 \Leftrightarrow n^2 - 60n + 784 < 0 \Leftrightarrow n \in (30 - \sqrt{116}, 30 + \sqrt{116}) \cap \mathbb{N}$ și $n > 29 \Leftrightarrow n \in \{30, 31, \dots, 40\}.$

13. Dacă $a = 2m + 1$ și $b = 2n + 1$, atunci $a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n + 2 = 4[m^2 + m + n^2 + n] + 2 = 2(2M + 1)$ care nu poate fi pătrat perfect, deoarece factorul 2 apare numai la puterea întâi.

14. Notăm $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$; atunci:
$$\sum_{i=1}^n \frac{x - a_i}{S - a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S - a_i}{S - a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{x - S}{S - a_i} = n - (x - S) \sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i}.$$

Ecuția devine $n + (x - S) \sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} = n \Leftrightarrow (x - S) \sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} = 0 \Leftrightarrow x = S$ pentru că $\sum_{i=1}^n \frac{1}{S - a_i} > 0$.

Deci $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

15. Să notăm $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$. Atunci:
$$E = \frac{1}{S - a_1} + \frac{1}{S - a_2} + \dots + \frac{1}{S - a_n} =$$
$$= \frac{1}{S} \left[\frac{S}{S - a_1} + \frac{S}{S - a_2} + \dots + \frac{S}{S - a_n} \right] = \frac{1}{S} \left[\frac{S - a_1}{S - a_1} + \frac{S - a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{S - a_n}{S - a_n} \right] = \frac{n}{S}.$$

16. Dacă $x + y + z = 0$, atunci folosim identitatea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ și obținem $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \neq 0$ și deci fracția este egală cu $\frac{2}{3}$.

Reciproc, dacă $\frac{2xyz - (x + y + z)}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6xyz - 3(x + y + z) = 2(x^3 + y^3 + z^3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + 3(x + y + z) = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)[2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 3] = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0.$

17. a) Din $ab + bc + ca = 0 \Rightarrow a + b = -\frac{ab}{c}; a + c = -\frac{ac}{b}; b + c = -\frac{bc}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum b^3 c^3 (a + b)(a + c) = \sum b^3 c^3 a^2 = a^2 b^2 c^2 (ab + bc + ca) = 0;$

b)
$$E = \frac{(3x - a - b - c)[(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 - (x - a)(x - b) - (x - b)(x - c) - (x - c)(x - a)]}{(3x - 2a - 2b - 2c)[(x - b - c)^2 + (x - c - a)^2 + (x - a - b)^2 - (x - b - c)(x - c - a) - (x - c - a)(x - a - b) - (x - a - b)(x - b - c)]} =$$
$$= \frac{(3x - a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}{(3x - 2a - 2b - 2c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)} = \frac{3x - a - b - c}{3x - 2a - 2b - 2c};$$

c) $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{3}(a + b + c) \Rightarrow E = \frac{(2 + \sqrt{2})(a + b + c)}{(1 + \sqrt{2})(a + b + c)} = \sqrt{2}.$

18. Dacă $x \neq 0$, atunci $1 + y + z \neq 0$ și analoagele. Atunci toate relațiile sunt echivalente cu: $1 + x + y + z = 0.$

19. Toate relațiile sunt echivalente cu: $a + b + c + abc = 0.$

20. Deoarece $xyz = 1 \Rightarrow x, y, z \neq 0$. Atunci: $0 \neq 1 + x + xy = 1 + x + \frac{1}{z} = \frac{1}{z}(z + zx + 1) =$

$= \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{y} + 1 \right) = \frac{1}{zy} (yz + y + 1).$ Pe de altă parte, $\frac{1}{1 + x + xy} + \frac{1}{1 + y + yz} + \frac{1}{1 + z + zx} =$
$$= \frac{z}{1 + z + zx} + \frac{1}{1 + z + zx} + \frac{1}{1 + y + yz} = \frac{z + 1}{1 + z + zx} + \frac{1}{1 + y + yz} = \frac{y(z + 1)}{1 + yz + y} + \frac{1}{1 + y + yz} = 1.$$

21. $48 = (xy + zt)^4 - (xy - zt)^4 = [(xy + zt)^2 + (xy - zt)^2][(xy + zt)^2 - (xy - zt)^2] =$

$$= 2(x^2y^2 + z^2t^2) \cdot 4xyzt = 2 \cdot 3 \cdot 4xyzt \Rightarrow xyzt = \frac{48}{24} = 2.$$

22. Din relația dată obținem: $y = \frac{7-3x}{2}$, pe care o înlocuim în produsul xy :

$$\begin{aligned} xy &= \frac{x(7-3x)}{2} = \frac{-3x^2 + 7x}{2} = -\frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) = -\frac{3}{2}\left[\left(x^2 - 2 \cdot \frac{7}{6}x + \frac{49}{36}\right) - \frac{49}{36}\right] = \\ &= -\frac{3}{2}\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right] = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{49}{24}. \text{ Valoarea maximă se obține pentru } x = \frac{7}{6} \text{ și aceea-} \\ &\text{ta este } \frac{49}{24}. \text{ Pentru acest } x \text{ obținem } y = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{23. } x^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + \frac{x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2xy) + x^2y^2}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{[(x^2 + y^2 + xy) - xy][(x^2 + y^2 + xy) + xy] + x^2y^2}{(x+y)^2} = \frac{(x^2 + y^2 + xy)^2 - x^2y^2 + x^2y^2}{(x+y)^2} = \\ &= \left[\frac{(x^2 + y^2 + xy)}{x+y}\right]^2, \text{ deci } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{x+y} \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

24. Inegalitatea dată este echivalentă cu: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, care este evidentă.

25. $Q(x) = (x+1)(x^2+1)$; de aici se observă că $P(-1) = 0$, adică: $5+a=0$, $a=-5$. În acest caz, $P(x) = (x^{20}-1) + (x^{16}-1) + (x^{12}-1) + (x^8-1) + (x^4-1) = (x^4-1)(x^{16}+2x^{12}+3x^8+4x+5)$ și deci $P(x)$ va fi divizibil cu $Q(x)$.

26. Să notăm cu $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$ produsul elementelor din M și să vedem cu câte zerouri se termină acest număr. Pentru aceasta, să constatăm că în șirul numerelor naturale, numerele divizibile la 5 se succed din 5 în 5, la 5^2 din 25 în 25. Cum 10 este $2 \cdot 5$, numărul zerourilor cu care se termină P este egal cu numărul aparițiilor lui 5 în acest produs, iar acesta este:

$$\frac{100}{5} + \frac{100}{25} = 20 + 4 = 24. \text{ Suma acestor numere va fi: } 5 + 10 + 15 + \dots + 100 = \frac{105 \cdot 20}{2}.$$

Răspunsul este deci negativ.

27. Scriem astfel: $N = \sqrt{4+\sqrt{15}} - 2\sqrt{2} - \sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}-8}{\sqrt{4+\sqrt{15}}+2\sqrt{2}} - \sqrt{4-\sqrt{15}} =$

$$= -\left(\frac{4-\sqrt{15}}{\sqrt{4-\sqrt{15}}+2\sqrt{2}} + \sqrt{4-\sqrt{15}}\right) < 0.$$

28. Numărul se poate scrie: $N = 5 \cdot 25^n \cdot 4 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^n = 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n =$
 $= 19(50^n + 12^n) + 50^n - 12^n = 19(50^n + 12^n) + (50-12)(50^{n-1} + 50^{n-2} \cdot 12 + \dots + 12^{n-1}) =$
 $= \text{multiplu de } 19.$

29. $A = 7^n \cdot 7^2 \cdot 3^n - 49 = 49 \cdot (21)^n - 49 = 49(21^n - 1) = 49(21-1)(21^{n-1} + 21^{n-2} + \dots + 1) =$
 $= \text{multiplu de } 49 \cdot 20 = \text{multiplu de } 980.$

30. Vom demonstra mai mult, adică: $E(x) = (x+1)^5 + (x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1$

se divide prin $x^2 + x + 1$. Într-adevăr, $E = (x+1)^3[(x+1)^2 + (x+1) + 1] + [(x+1)^2 + (x+1) + 1] = [(x+1)^2 + (x+1) + 1][(x+1)^3 + 1] = (x^2 + 3x + 3)(x+2)(x^2 + x + 1)$. Deci $111111_{(x+1)} = E(x) =$ multiplu de $(x^2 + x + 1) =$ multiplu de 111_x . Luând $x = 1990$, obținem afirmația din enunț.

31. $N = 1991 \cdot 1990^{659} + 6(1990^{659} + 1) = 1991 \cdot 1990^{659} + 6(1990 + 1)(1990^{658} - 1990^{657} + \dots + 1) =$ mult. 1991.

32. Putem scrie succesiv: $N = 2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{n+3} - 22 \cdot 3^n = 8 \cdot 4^{2n} + 5 \cdot 3^n = 13 \cdot 3^n + 8(4^{2n} - 3^n) =$
 $= 13 \cdot 3^n + 8(16^n - 3^n) = 13 \cdot 3^n + 8(16 - 3)(16^{n-1} + 16^{n-2} \cdot 3 + \dots + 3^{n-1}) =$ multiplu de 13.

33. Frația se poate scrie:
$$\frac{6^{2n} + 12 \cdot 6^n + 32}{5(6^n + 8)} = \frac{(6^n + 8)(6^n + 4)}{5(6^n + 8)} = \frac{6^n + 4}{5} = 1 + \frac{6^n - 1}{5} =$$

 $= 1 + \frac{(6-1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 1)}{5} = 1 + 6^{n-1} + 6^{n-2} + \dots + 1 \in 2\mathbb{N}.$

34. Folosim identitățile: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ și $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - b^{2n})$ și constatăm că:

$A = \frac{2^{2n+1} + 1}{4^n - 1} = \frac{(2+1)(2^{2n} - 2^{2n-1} + \dots + 1)}{(4-1)(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 1)}$ care simplifică prin 3. Analog:

$B = \frac{(2^3)^{2n+1} + 1}{(2^4)^n - 1} = \frac{(2^3 + 1)(2^{3 \cdot 2n} - 2^{3(2n-1)} + \dots + 1)}{(2^4 - 1)(2^{4(n-1)} + \dots + 1)}$, care, de asemenea se simplifică prin 3.

35. Dacă p este număr prim, diferit de 3, va admite una din scrierile: $p = 3m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, pentru care $E_1 = 9m(3m^2 - 1)$ sau $p = 3m - 1$, $m \in \mathbb{N}$, pentru care $E_2 = 27m(m^2 - 2m + 1) = 27m(m-1)^2$.

36. Conform identității împărțirii cu rest, vom avea: $N = 7 \cdot C + R$; $0 \leq R < 7$; $125 + C = N$;
 $R = \frac{C}{4}$, de unde: $125 + C = 7C + \frac{C}{4}$ sau: $500 + 4C = 28C + C \Leftrightarrow 25 \cdot C = 500 \Leftrightarrow C = 20$,

deci: $N = C + 125 = 145$.

37. $31120_x = 856 \Leftrightarrow 3x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 856 = 0 \Leftrightarrow 3x^4 - 12x^3 + 13x^3 - 52x^2 + 53x^2 - 212x +$
 $+ 214x - 856 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x-4) + 13x^2(x-4) + 53x(x-4) + 214(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(3x^3 +$
 $+ 13x^2 + 53x + 214) = 0$ cu singura soluție număr natural $x = 4$.

38. $(n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n+1) + 1$ care este număr impar, deci nu poate fi divizibil la un număr par. În mod analog, $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

39. $E_1 = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n = 7 \cdot 2^n + 3(9^n - 2^n) = 7 \cdot 2^n + 3(9 - 2)(9^{n-1} + 9^{n-2} \cdot 2 + \dots + 2^{n-1}) =$ mul-
 tiplu de 7; $E_2 = 9 \cdot 3^n + 4 \cdot 16^n = 13 \cdot 3^n + 4(16^n - 3^n) = 13 \cdot 3^n + 4(16 - 3)(16^{n-1} + 16^{n-2} \cdot 3 +$
 $+ \dots + 3^{n-1}) =$ multiplu de 13. În mod analog, E_3 este divizibil cu 21.

40. Expresia se poate aduce la o formă mai simplă: $E = \frac{a(a^4 + 5a^3 + 5a^2 - 5a - 6)}{15} =$

$= \frac{a(a-1)(a+1)(a+2)(a+3)}{15}$. Am văzut însă că produsul a k numere întregi consecutive este

divizibil la $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$, în cazul nostru, produsul a 5 numere întregi consecutive, va fi divizibil prin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 15 \cdot 8$, de unde rezultă afirmația noastră.

41. În relația dată împărțim prin b^2 și obținem $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2 = 5\frac{a}{b}$. Notăm $\frac{a}{b} = t$, $t \in (0, 1)$;

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2; t_2 = \frac{1}{2}; \text{ corespunde } t = \frac{1}{2}. \text{ Atunci: } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{t+1}{t-1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = -3.$$

42. Utilizăm descompunerea: $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$, în care luăm $a = 1985^n$ și obținem numărul scris sub forma $(1985^{2n} - 1985^n + 1)(1985^{2n} + 1985^n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$.

43. $\frac{n^2 + 7n + 13}{n + 3} = n + 4 + \frac{1}{n + 3}$ și pentru $n \in \mathbb{N}$, $n + 3 \geq 3$ rezultă că $n + 3$ nu poate fi un divi-

zor al lui 1 (adică ± 1). Analog pentru $n^2 + 7n + 14$.

44. $S = (n - 2)^3 + (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 5n^3 + 30n = 5n(n^2 + 6)$.

45. Dacă $N = (2m + 1)$, atunci $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m + 1) + 1$ și dacă ținem cont că $m(m + 1)$ este divizibil la 2, obținem $4m(m + 1) + 1 = 8q + 1$, deci restul este 1.

46. Dacă $p + 1$ ar fi pătrat perfect, atunci ar exista $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $p + 1 = k^2 \Leftrightarrow p = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$, care, pentru a fi număr prim, ar trebui ca $k - 1 = 1$ sau $k = 2 \Rightarrow p = 1 \cdot 3 = 3$, contradicție.

47. Presupunem că acest lucru ar fi posibil și fie x numărul de operații efectuate cu vasul de 6 l și y numărul de operații efectuate cu vasul de 9 l. Va trebui ca în final să se obțină cei 5 l. Deci $6x + 9y = 5 \Leftrightarrow 3(2x + 3y) = 5$, contradicție, deoarece partea dreaptă nu se divide cu 3.

48. $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) - 2n(n + 3) = n(n + 3)[(n + 1)(n + 2) - 2] = n(n + 3)[n^2 + 3n + 2 - 2] = [n(n + 3)^2]$.

49. Fie trei numere consecutive: $3n - 1, 3n, 3n + 1$. Avem: $(3n - 1)^3 + (3n)^3 + (3n + 1)^3 = 27n^3 + 6n[(3n - 1)^2 - (3n - 1)(3n + 1) + (3n + 1)^2] = \text{multiplu de } 3$.

50. Numărul se mai scrie: $M = n(n - 1)(n + 1) + 3(p + 3^{q-1})(n - 1)(n + 1)$, dar produsul a trei numere naturale consecutive este divizibil prin 3, deci M este divizibil prin 3.

51. $E = n^3 - n + 6n = (n - 1)n(n + 1) + 6n$. Să remarcăm că produsul a două numere naturale consecutive este divizibil prin 2, iar produsul a trei numere naturale consecutive este divizibil prin 3, deci și prin 6. De aici rezultă E divizibil prin 6.

52. Ținem cont de faptul că produsul a k numere naturale consecutive este divizibil prin k , întrucât numerele naturale multipli de k se repetă în șirul numerelor naturale după k pași. Dar asta înseamnă că se divide și la $k - 1$, întrucât k numere consecutive conțin și $k - 1$ numere consecutive și apoi la $k - 2$ etc. Deci produsul a k numere naturale consecutive se divide la produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$. Numărul nostru devine: $P(x) = x^2(x^4 - 5x^2 + 4) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x - 1) \cdot x \cdot x \cdot (x + 1)(x + 2)$, care conține produsul a 5 numere consecutive, deci se divide la $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Pe de altă parte, produsele $(x - 2)(x - 1)x$ și $x(x + 1)(x + 2)$ conțin fiecare pe 3 ca factor, deci $120 \cdot 3 = 360$.

53. Un număr natural, prin împărțire la 7, poate da unul din următoarele resturi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, deci orice $n \in \mathbb{N}$ se poate scrie: $n = 7p$; $7p \pm 1$, $7p \pm 2$; $7p \pm 3$. Pentru $n = 7p \Rightarrow n^2 + 1 = 49p^2 + 1$ nu e multiplu de 7; $n = 7p \pm 1 \Rightarrow n^2 + 1 = (7p \pm 1)^2 + 1 = \text{mult. } 7 + 2$; $n = 7p \pm 2 \Rightarrow n^2 + 1 = (7p \pm 2)^2 + 1 = \text{mult. } 7 + 5$; $n = 7p \pm 3 \Rightarrow (7p \pm 3)^2 + 1 = \text{mult. } 7 + 3$.

54. $F = \frac{mn(m + n)}{p(p + 1)}$ se simplifică prin 2 pentru că numitorul este produsul a două numere conse-

cutive, dintre care unul este obligatoriu par, iar numărătorul se dovedește de asemenea un număr par, din analiza tuturor cazurilor. Dacă unul din numerele m sau n este par, numărătorul este par, iar dacă m și n sunt impare, suma lor este pară.

$$55. F(x, y) = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+y)^2 + (x+y) + xy(x+y)} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+y)(x+y+1+xy)} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(y+1)(x+y)}. \text{ Dacă}$$

x, y sunt ambele pare, $x+y$ este par; dacă x este impar, atunci $x+1$ este par, deci numitorul este oricum un număr par; în același timp $(x+2)(x+3)$ este par, deoarece este produsul a două numere consecutive.

$$56. E(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x + 3} = 1 - \frac{2}{x^2 - 2x + 3}. \text{ Notăm } f(x) = x^2 - 2x + 3; f \text{ are minim pentru } X_{\min} = -\frac{b}{2a}; X_{\min} = 2; \frac{2}{f(X_{\min})} = \text{maxim} \Rightarrow E(X_{\min}) = E(2) = 1 - \frac{2}{4 - 4 + 3} \Rightarrow E(2) = \frac{1}{3}.$$

$$57. (4n+1, 3n+2) \neq 1. \text{ Se observă că pentru } n=0, F(0)=2; \frac{1}{F(n)} = \frac{4n+1}{3n+2} = \frac{3n+2}{3n+2} + \frac{n-1}{3n+2} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{3n+2}{3n+2} \right) - \left(\frac{5}{3n+2} \right). \text{ Trebuie ca } 3n+2 = \pm 1, \pm 5 \text{ pentru } n \in \mathbb{N}; 3n+2=1 \Rightarrow n = -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}; 3n+2=-1 \Rightarrow n=-1; -1 \notin \mathbb{N}; 3n+2=-5 \Rightarrow n=-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3} \notin \mathbb{N}; 3n+2=5 \Rightarrow n=1; 1 \in \mathbb{N}, n=0 \text{ și } n=1 \text{ sunt soluții.}$$

$$58. E = \frac{\sqrt{7}(5+11x\sqrt{5})}{\sqrt{5}+11x} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}(\sqrt{5}+11x)}{\sqrt{5}+11} = \sqrt{35}. \text{ Pentru } x = -\frac{\sqrt{5}}{11} \text{ expresia nu este definită.}$$

59. Efectuând calculele și grupând convenabil termenii avem: $E_1 = ab[1 + 2(a-b) + (a-b)^2] - (a^2 + b^2) - (a-b)(a^2 + b^2) + ab = ab(a-b)^2 + ab + 2ab(a-b) - (a^2 + b^2) - (a-b)(a^2 + b^2) + ab = (a-b)[ab(a-b) + 2ab - a^2 - b^2] + 2ab - a^2 - b^2 = (a-b)[ab(a-b) - (a-b)^2] - (a-b)^2 = (a-b)[ab(a-b) - (a-b)^2 - (a-b)] = (a-b)(ab - a + b - 1)$. Analog se procedează pentru E_2 .

60. Notăm $a+b+c=s$. Atunci: $E = [s + (n-1)a][s + (n-1)b][s + (n-1)c] - (n-1)^3 abc = s^3 + (n-1)(a+b+c)s^2 + (n-1)^2(ab+bc+ca)s + (n-1)^3 abc - (n-1)^3 abc = s^3 + (n-1)s^2 + (n-1)^2(ab+bc+ca)s = s[ns^2 + (n-1)^2(ab+bc+ca)] = (a+b+c)[n(a+b+c)^2 + (n-1)^2 \cdot (ab+bc+ca)]$.

61. Fie $n = m+1$. Atunci: $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = [(m+1)^2 + (m+1) + 1][(m+1)^2 - (m+1) + 1] = (m^2 + 3m + 3)(m^2 + m + 1)$, iar $m^4 + m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 - m^2 = (m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)$, deci cele două numere, având un factor comun, nu sunt relativ prime între ele.

$$62. a) \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}; b) \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots + \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}; c) \text{ înmulțim a) și b).}$$

$$63. \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{200} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 19\sqrt{2} = \sqrt{361 \cdot 2} = \sqrt{722}. \text{ Analog și celălalt.}$$

$$64. E = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\sqrt{2}-1+1-\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{4}{6}} - \sqrt{\frac{3}{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$65. \text{ Folosim cunoscuta inegalitate a mediilor: } \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}. \text{ Astfel, vom putea}$$

scrie: $\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} < \frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{2+3} < \frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{3+4} < \frac{1}{2}$; ...; $\frac{\sqrt{n(n+1)}}{n+n+1} < \frac{1}{2}$, pe care le sumăm membru cu membru și obținem: $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \dots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}$.

66. Din $abc = 1 \Rightarrow a, b, c \neq 0$. Atunci: $ab - a \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{c}(abc - ac - c) = \frac{1}{c}(1 - ac - c) =$
 $= -\frac{1}{cb}(abc + bc - b) = -\frac{1}{bc}(1 + bc - b) = -a(bc - b + 1) \neq 0$. Deci numitorii sunt diferiți de zero și E este bine definită. În continuare: $E = \frac{1}{1-b+bc} - \frac{b}{bc-b+1} - \frac{c}{1-ac-c} = \frac{1-b}{bc-b+1} +$
 $+ \frac{bc}{1+bc-b} = 1$.

67. Notăm $\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} = u$ și $\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} = v$; atunci $u^3 + v^3 = 108$ și $uv = 6$. Dar $u^3 + v^3 =$
 $= (u+v)^3 - 3uv(u+v)$. Deci $a^3 - 18a - 108 = 0 \Leftrightarrow (a-6)(a^2 + 6a + 18) = 0$. Cum $a \in \mathbb{R}_+$ și $a^2 + 6a + 18 > 0$, rezultă $a = 6$.

68. Fie $\sqrt[3]{41+14\sqrt{109}} = u$ și $\sqrt[3]{41-14\sqrt{109}} = v$; $u^3 + v^3 = 82$, $u^3v^3 = -19 \cdot 683$, $uv = -27$,
 $(u+v)^3 - 3uv(u+v) = 82 \Leftrightarrow x^3 + 81x - 82 = 0$ cu singura soluție reală $x = 1$. Analog, găsim $y = 2$.

Așadar, $(x-y)^n = (-1)^n = \begin{cases} -1, n \text{ impar} \\ 1, n \text{ par} \end{cases}$.

69. a) Observăm că: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$; $2n+1 = 13 \Rightarrow n = 6$, deci $13 = 7^2 - 6^2$. Analog,
 $31 = 16^2 - 15^2$. Generalizarea este dată de formula de mai sus.

b) $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 1993 = (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots + (997^2 - 996^2) = 997^2$.

70. a) $a^3 - b^3 - 6ab = (a-b)(a^2 + ab + b^2) - 6ab = 2(a^2 + ab + b^2) - 6ab = 2(a^2 - 2ab + b^2) =$
 $= 2(a-b)^2 = 8$;

b) Utilizând a), obținem: $5 + x - (x-3) = 8 + 6\sqrt[3]{(5+x)(x-3)} \Leftrightarrow 6\sqrt[3]{(5+x)(x-3)} = 0 \Leftrightarrow x = 3$
sau $x = -5$.

71. Fie $x + y + z = s$. Sistemul devine: $xy + xz = as$; $yz + xy = bs$; $xz + yz = cs$. Adunăm:

$xy + yz + xz = \frac{a+b+c}{2}s$. De unde, prin scăderi succesive, obținem: $yz = \frac{-a+b+c}{2}s$;

$xy = \frac{a+b-c}{2}s$; $xz = \frac{a-b+c}{2}s$, pe care le înmulțim și obținem:

$xyz = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)s^3}{8}}$, de unde: $x = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(-a+b+c)}} \cdot \sqrt{s} = A\sqrt{s}$;

$y = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{2(a-b+c)}} \cdot \sqrt{s} = B\sqrt{s}$; $z = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{2(a+b-c)}} \cdot \sqrt{s} = C\sqrt{s}$. Adunăm

aceste ultime relații și după simplificarea cu $\sqrt{s}$ obținem: $\sqrt{s} = A + B + C$; de aici:

$x = A(A + B + C)$; $y = B(A + B + C)$; și $z = C(A + B + C)$.

Observație: Radicalii există, deoarece $b + c - a > 0$ etc.

72. Notăm cu $S = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Atunci relația dată devine: $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - nS^2 = 0$. Să

observăm că $nS^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)S$. Deci:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - nS^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)S + nS^2 = (x_1^2 - 2x_1S + S^2) + (x_2^2 - 2x_2S + S^2) + \dots + (x_n^2 - 2x_nS + S^2) = (x_1 - S)^2 + (x_2 - S)^2 + \dots + (x_n - S)^2 = 0. \text{ De unde: } x_1 = x_2 = \dots = x_n = S.$$

73. Observăm mai întâi că $x \in \mathbb{Z}$. Pe baza definiției părții întregi, avem: $x + 1 \leq \frac{3x+1}{2} < x + 2$

de unde rezultă $x \geq 1$ și $x < 3$, deci $x \in \{1, 2\}$.

74. Fie $[x] = n$, deci $n \leq x < n + 1$. Pentru orice x , $[x]^2 = n^2$. Pentru a avea loc egalitatea, trebuie ca și partea stângă să fie egală cu n^2 , deci $x < \sqrt{n^2 + 1}$. În acest fel, $x \in [n, \sqrt{n^2 + 1})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

75. Din egalitatea: $x = [x] + \{x\}$, obținem: $\{x\}^2 = \{([x] + \{x\})^2\} = \{[x]^2 + 2[x] \cdot \{x\} + \{x\}^2\} = \{2[x] \cdot \{x\} + \{x\}^2\}$. De aici deducem că relația $\{x^2\} = \{x\}^2$ are loc dacă și numai dacă $2[x] \cdot \{x\}$ este un număr întreg. Deci: $0 \leq x \leq 1$ sau $x = m + \frac{l}{2m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l < 2m$.

76. Putem scrie: $x = [x] + \{x\}$ și înlocuim: $[x] \cdot \{x\} < [x] + \{x\} - 1$ sau $[x](\{x\} - 1) < \{x\} - 1$. Dar $\{x\} - 1 < 0$, de unde rezultă $[x] > 1$, deci $x \geq 2$.

77. Fie $A \cap B \neq \emptyset$; atunci există $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{3a+1}{3a-5} = \frac{4b+1}{4b-4} \Leftrightarrow (3a+1)(4b-4) = (4b+1)(3a-5) \Leftrightarrow 24b - 15a = -1 \Rightarrow a = \frac{24b+1}{15} = b + \frac{9b+1}{15} \in \mathbb{N}$; dar $9b+1$ nu poate fi

divizibil prin 15, $\forall b \in \mathbb{N}$. De aici rezultă că $A \cap B = \emptyset$.

78. a) Pentru $n \geq 3$ rezultă $n^2 \geq 9$, $n^{n-2} \geq 3^{n-2}$ și $n^{n-2} - 1 \geq 3^{n-2} - 1$ deci și $n^2(n^{n-2} - 1) \geq 3^2(3^{n-2} - 1)$.

b) Utilizând inegalitatea de la punctul a), cu egalitate pentru $n = 3$, obținem soluția $x = 3$, iar pentru $x > 3$ rezultă $x^x - x^2 > 3^x - 9$.

79. Adunăm relațiile (2), (3), (4) și obținem: $12 + 3d \leq 2a + 2b + 2c + 3d \leq 12 \Rightarrow 3d \leq 0$, $d \leq 0$, dar $d \geq 0$, deci $d = 0$. Grupăm convenabil câte două relații scrise astfel: $a + b + c \geq 6$; $-a - b - d \geq -5$; $-a - c - d \geq -4$; $-b - c - d \geq -3$ și obținem $a \geq d + 3 = 3$; $b \geq 2$; $c \geq 1$. Deci $5 \leq a + b \leq 5 \Rightarrow a + b = 5$. Analog: $a + c = 4$ și $b + c = 3$. Rezolvăm acest sistem și obținem: $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$; $d = 0$.

80. Adunând prima și a treia relație obținem $y - z \geq 1$, iar relația a doua; $y \leq z + 1$, de unde: $y = z + 1$. Analog, deducem $x = 2z + 1$. Așadar, $x = 2m + 1$, $y = m + 1$, $z = m$; $m \in \mathbb{N}$.

81. Din ipoteză rezultă $3a \leq b + c + d \Leftrightarrow 4a \leq a + b + c + d = 4 \Leftrightarrow a \leq 1$. Deci valoarea cea mai mare pe care o poate lua a este 1 și se obține pentru $a = b = c = d = 1$. În continuare avem: $2b \leq c + d \Leftrightarrow 3b \leq b + c + d \Leftrightarrow a + 3b \leq a + b + c + d = 4$. Deoarece $a \geq 0$, maximul lui b este $\frac{4}{3}$ și

se obține pentru $a = 0$, $c = d = \frac{4}{3}$. În mod analog, avem: $2c \leq c + d \Leftrightarrow a + b + 2c \leq 4$. Dar $a, b \geq 0$ maximul lui este 2, și aceasta pentru $a = b = 0$ și $d = 2$. În fine, pentru $a = b = c = 0$ obținem $d = 4$.

82. Să presupunem, pentru început, că cel puțin unul din numerele $a - b$, $b - c$, $c - a$ este nul.

Fie de exemplu $a = b$. Atunci avem evident: $0 = (a - b)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. Fie acum $a - b \neq 0$,

$a - c \neq 0$, $b - c \neq 0$ și să notăm cu $m = \min\{|a - b|, |a - c|, |b - c|\}$ și să presupunem $a < b < c$. Atunci $b - a \geq m$, $c - b \geq m$, de unde $c - a = (c - b) + (b - a) \geq 2m$. De unde: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq m^2 + 4m^2 + m^2 = 6m^2$. Pe de altă parte: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$; de aici: $6m^2 \leq (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ sau $m^2 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

83. Considerăm identitatea: $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$, care fiind valabilă pentru orice k , vom da valori (analog și în cazul identității din enunț!) astfel: pentru $k = 1$, $2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$; pentru $k = 2$, $3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$; pentru $k = 3$, $4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$; ...; pentru $k = n$, $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Adunând membru cu membru aceste relații, vom obține: $(n + 1)^2 - 1 = 2(1 + 2 + \dots + n) + n$

sau $2 \left(\sum_{k=1}^n k \right) = (n + 1)^2 - (n + 1) \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$. Folosind identitatea: $(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k$

se va obține prin sumare: $(n + 1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n)$, de unde

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$