c o l e c ț i a

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Cezar Băjenaru, Iuliana Ene
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Delia Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : Olimpiade și concursuri școlare : clasele VII-VIII : 2017-2018 / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Gabriela-Roxana Bondoc, ... - Pitești : Paralela 45, 2018
ISBN 978-973-47-2829-9

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Bondoc, Gabriela-Roxana

51

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot
Gabriela-Roxana Bondoc, Mariana Draga-Tătucu
Vlad Lungu, Elena Rîmniceanu
Daniel Stretcu, Tomiță-Constantin Vasile

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele VII-VIII

2017-2018

Editura Paralela 45

clasa a VII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

7.O.1. Determinaţi numerele naturale nenule a şi b, astfel încât $ab + b + 2018 = ab^2$.

7.O.2. a) Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}.$$

b) Folosind eventual egalitatea demonstrată la punctul a), arătaţi că:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2018^3}<1{,}375\,.$$

7.O.3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Prin A se duce dreapta d paralelă cu BC. Perpendiculara în C pe AC taie pe d în B', iar perpendiculara în B pe AB taie pe d în C'.

a) Demonstraţi că $ABCB'$ este paralelogram.

b) Fie A' mijlocul lui $[BC]$. Dacă $AA' \cap BB' = \{D\}$, demonstraţi că $\dfrac{DA}{DA'}=2$.

c) Demonstraţi că AA', BB' şi CC' sunt concurente.

Prelucrare problema SE17.308, *Supliment Gazeta Matematică* nr. 10/2017

7.O.4. În triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\sphericalangle A) = 40°$ considerăm punctul $D \in (AC)$ astfel încât $m(\sphericalangle ABD) = 60°$. Bisectoarea unghiului A intersectează dreapta BD în punctul E, iar punctul T aparţine bisectoarei unghiului A, astfel încât $E \in (AT)$ şi $[ET] \equiv [AB]$. Arătaţi că patrulaterul $ABTC$ este romb.

Gazeta Matematică nr. 9/2017

Arad

7.O.5. a) Arătaţi că numărul $a = 2\cdot(1+2+\ldots+2018)\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2018\cdot 2019}\right)$ este pătrat perfect.

b) Care este soluţia în $\mathbb{Q}$ a ecuaţiei: $\left(\frac{1}{33}+\frac{1}{303}+\ldots+\frac{1}{3\underbrace{00.....0}_{n\text{ zerouri}}3}\right)\cdot x=\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{1\underbrace{00.....0}_{n\text{ zerouri}}1}$?

7.O.6. Se consideră numărul $A = \sqrt{\overline{a,b(cd)} + \overline{b,c(da)} + \overline{c,d(ab)} + \overline{d,a(bc)}}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule diferite.

a) Demonstraţi că $1 \le 0{,}3 \cdot A \le \sqrt{3}$.

b) Câte numere $\overline{abcd}$ sunt dacă $A \in \mathbb{Q}$?

7.O.7. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construieşte trapezul $BCEF$ cu $CE \parallel BF$ şi $BF = EF$, astfel încât $[AE \cap [DF = \{B\}$. Fie M mijlocul laturii $[CE]$ şi N punctul în care paralela prin E la AF intersectează latura $[BC]$.

a) Stabiliţi natura ΔACF.

b) Demonstraţi că punctele A, M şi N sunt coliniare.

7.O.8. În dreptunghiul $ABCD$ notăm cu E simetricul punctului B faţă de punctul A şi cu F simetricul punctului A faţă de punctul D. Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, $\{P\} = OE \cap AD$ şi $\{Q\} = OF \cap CD$, demonstraţi că $\dfrac{QD}{AB} + \dfrac{PD}{BC} = 1$.

Argeș

7.O.9. Arătaţi că $\dfrac{\sqrt{2018}}{\sqrt{2016} + \sqrt{2017} + \sqrt{2019} + \sqrt{2020}} > \dfrac{1}{2^{2020} : 2^{2018}}$.

7.O.10. Dacă a şi x sunt numere reale pozitive şi $x\sqrt{x} - (a+1)\sqrt{x} = a$, calculaţi $x - \sqrt{x}$.

Marin Chirciu

7.O.11. Considerăm triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, P mijlocul segmentului (BC) şi $BN \cap CM = \{E\}$. Dacă $AB = 3MB$, $2MC = 5ME$ şi $AP = 5BP$, determinaţi măsura unghiului format de dreptele BN şi CM.

7.O.12. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, N simetricul punctului C faţă de B şi $M \in (AB)$, $AM = \dfrac{3}{4}AB$. Demonstraţi că punctele M, N, G sunt coliniare.

Marian Teler

Bacău

7.O.13. a) Fie a şi b două numere naturale nenule. Arătaţi că $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ este raţional dacă şi numai dacă a şi b sunt pătrate perfecte.

b) Aflaţi numerele naturale n, ştiind că $\sqrt{n^2 + n + 2} + \sqrt{n! + 8}$ este raţional.

7.O.14. Fie mulţimea $A = \left\{(m,n) \middle| m,n > 0 \text{ şi } \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2018}\right\}$.

a) Arătaţi că mulţimea A este nevidă.

clasa a VIII-a

ETAPA LOCALĂ

Alba

8.O.1. a) Arătaţi că $\sqrt{4n+2\sqrt{4n^2-1}}=\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}$, pentru orice număr natural nenul n.

b) Calculaţi suma $S=\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}+\dfrac{1}{\sqrt{12+2\sqrt{35}}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{48+2\sqrt{575}}}$.

8.O.2. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Arătaţi că $\dfrac{a}{a+2b}+\dfrac{b}{b+2a}+\dfrac{c}{c+2d}+\dfrac{d}{d+2c}\geq\dfrac{4}{3}$.

Gazeta Matematică nr. 9/2017

8.O.3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu lungimea muchiei egală cu 1 cm, iar punctele M şi N sunt intersecţiile diagonalelor feţelor $ABB'A'$, respectiv $BCC'B'$.

a) Arătaţi că $MN \perp BD$ şi calculaţi aria patrulaterului $ANC'D'$.

b) Dacă planul (CMD) intersectează dreapta BC' în punctul P, iar Q este mijlocul lui $[BC]$, arătaţi că punctele P, Q şi B' sunt coliniare.

8.O.4. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care P este mijlocul segmentului $(C'D')$, $AB = 2a$, $AA' = 2b$, $a, b \in (0, +\infty)$, $BC' \cap B'C = \{Q\}$ şi $AQ \perp QP$.

a) Arătaţi că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

b) Dacă T este piciorul perpendicularei din punctul Q pe dreapta AP, arătaţi că $TQ \perp B'C$.

c) Calculaţi, în funcţie de a, distanţa de la punctul Q la dreapta AP.

Arad

8.O.5. a) Arătaţi că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}}$.

b) Arătaţi că suma $\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot1}\left(\sqrt{2}+\sqrt{1}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+...+\dfrac{1}{\sqrt{100\cdot99}\left(\sqrt{100}+\sqrt{99}\right)}<1$.

8.O.6. Arătaţi că, pentru orice x număr real, avem $\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{x^2+2x+4}+\dfrac{1}{x^2+4x+7}<2$.

8.O.7. În tetraedrul $ABCD$, cu lungimile muchiilor AB, BC şi CA proporţionale cu numerele 3, 4, respectiv 5, se construieşte M' simetricul lui M faţă de B, unde $M \in (CD)$. Arătaţi că $AM = AM'$, dacă şi numai dacă $AB \perp (BCD)$.

8.O.8. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm M, N, P mijloacele muchiilor $[AB]$, $[B'C']$, respectiv $[DD']$.

a) Demonstraţi că $CMNP$ este piramidă triunghiulară regulată.

b) Determinaţi sinusul unghiului format de dreapta CM şi planul (MNP).

c) Determinaţi sinusul unghiului format de planele (MNP) şi (MNC).

Argeș

8.O.9. a) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ ordonaţi crescător numerele:

$$x = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\ y = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ şi } z = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

b) Folosind eventual rezultatul de la punctul a), demonstraţi că partea întreagă a numărului α este mai mică decât 90, unde $\alpha = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2010}}$.

Adrian Gobej

8.O.10. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi următoarea inegalitate:

$$(a,b)^2+(b,c)^2+(c,a)^2+[a,b]^2+[b,c]^2+[c,a]^2 \geq \frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{2},$$

unde prin (x, y), respectiv $[x, y]$, înţelegem cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.

Dragoș Petrică, Cosmin Manea

8.O.11. Se dă cubul $ABCDMNPQ$, în care O_1 şi O_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv BCD.

a) Arătaţi că $MC \perp (BDP)$.

b) Ştiind că $O_1O_2 = 2$ cm, calculaţi lungimea muchiei cubului.

c) Ştiind că muchia cubului este de $2+\sqrt{2}$ cm, $E \in [AD]$, $F \in [CD]$, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{CF}{FD} = \sqrt{2}$, determinaţi măsura unghiului format de planele (MO_2F) şi (PO_1E).

Adrian Gobej

8.O.12. Pe planul trapezului isoscel ortodiagonal, unde $AB \parallel CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm, se ridică perpendiculara OP ($BD \cap AC = \{O\}$), $OP = 4$ cm. Aflaţi:

a) distanţa de la punctul P la dreapta DM ($DM \perp AB$);

b) distanţa de la O la planul (PDA).

CUPRINS